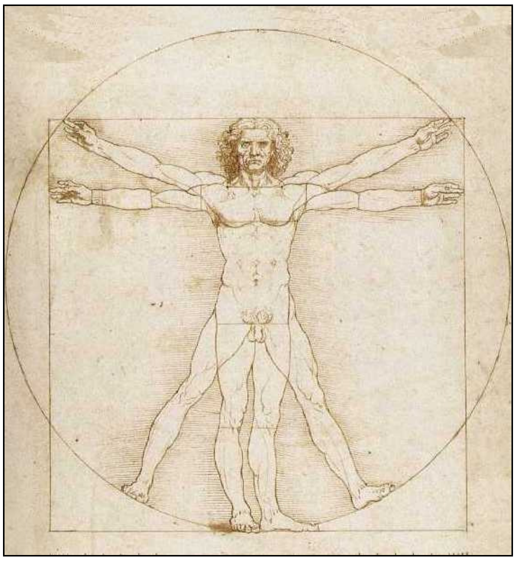
TĚLESNÉ MÍRY

Brunetto Piochi*

ÚVOD

Aktivita nazvaná Tělesné míry se vztahuje k tématu měření a dále k některým tématům z aritmetiky (poměr a úměrnost) a statistiky (aritmetický průměr, medián, korelace…). Aktivitu připravili a vyzkoušeli dva partneři projektu tak, že se dá využít i v práci se žáky při návratu k historickým námětům nebo jako úvod k provádění výpočtů pomocí počítače a ke grafickému znázornění rozměru.

Studenti učitelství matematiky měli za úkol sami na sobě provést určitá měření (výška, váha, délka paží atd.). Pomocí těchto měření pak provedli některé aritmetické a statistické výpočty. Jako pomůcku přitom využívali software EXCEL a snažili se objevit významné korelace a poměr. Tato látka se dá dobře propojit s hypotézami Leonarda da Vinci o anatomii lidského těla. Podobné aktivity se pak provedly se žáky 2. stupně základní školy. Výsledky pilotáže se staly námětem pro následnou diskusi v semináři na pedagogické fakultě.



Leonardo da Vinci: Vitruviova figura

Leonardo studuje proporce lidského těla a jeho souměřitelnost s dokonalými geometrickými tvary (kruh a čtverec). Šlo o vědeckou analýzu, která zahrnovala jak kosmologické významy (souvislosti mikrokosmu a makrokosmu), tak umělecké významy (správné zobrazení lidského těla a architektonický design opírající se o proporce lidského těla). V této slavné kresbě benátské provenience uvádí Leonerdo Vitruviovu figuru originálním způsobem.

Z výstavy "La mente di Leonardo" konané ve Florencii (Itálie) v září 2006

* Dipartimento di Matematica, Università di Firenze, Itálie.

Hlavní pilotáž

Brunetto Piochi

ZPRACOVÁNÍ AKTIVITY V OBECNÉ ROVINĚ

Cíle

Pro učitele VŠ

- Vedení studentů od teorie k praxi
- Umožnění vlastní zkušenosti studentů s danou aktivitou před tím, než bude použita v práci se žáky 2. stupně ZŠ
- Poskytování rad a zpětné vazby

Pro studenty učitelství matematiky

- Diskuse o měření a s tím související didaktické argumenty
- Povědomí o historickém vývoji měření (především délka, váha, objem,…)
- Zkušenost s měřením ve vztahu k dané problematice a práce na metrických úlohách

Pro žáky 2. stupně ZŠ a nižších gymnázií

- Zkušenost s měřením ve vztahu k dané problematice a práce na metrických úlohách
- Povědomí o historickém vývoji měření (především délka, váha, objem,…)
- Měření pomocí základních mezinárodních jednotek
- Pochopení významu slova „odhad"
- Výpočet aritmetického průměru a mediánu ze série dat
- Znázornění veličin pomocí grafu.

Popis pilotáže

Aktivita byla vyzkoušena se 30 studenty v prvním ročníku specializace matematika a přírodní vědy (studium učitelství pro 2. stupeň ZŠ) v SSIS, tj. instituci, která připravuje učitele středních škol, v italské Florencii.

Fáze a časové rozvržení:

- Úvodní hodina na téma měření a prezentace textu Leonarda da Vinci (45 min.)
- Aktivita měření, zpracování dat a diskuse (1 hod. 30 min.)
- Pilotáž na ZŠ (3 hod.)
- Závěrečná diskuse a zpracování konečného návrhu (45 min.)

Po teoretickém úvodu do významu a historie měření dostali studenti SSIS text Leonarda da Vinci o Vitruviově figuře. Z Leonardových tvrzení byla vybrána ta, která nejlépe vyhovovala pro ověření pomocí experimentu, a to zejména:

„Délka rozpažených rukou člověka je rovna jeho výšce."

„Od lokte ke konci ruky, to je asi pětina výšky člověka."

„Od spodku brady k temeni hlavy, to je jedna osmina výšky člověka."

Studenti se navzájem změřili a pak přenesli získané míry na pracovní stránky programu EXCEL, aby prověřili, zda jsou Leonardovy hypotézy správné.

V diskusi, která následovala poté, byli studenti vyzváni, aby odpověděli na předem připravené dotazy. Měli se přitom soustředit především na didaktické aspekty této aktivity:

- Jaké kompetence vyžaduje tento typ aktivit? Jaké předběžné vědomosti a dovednosti jsou zapotřebí? O jaký druh učení jde?
- S jakými obtížemi jste se při této aktivitě setkali? Myslíte si, že žáci budou mít ještě jiné, další problémy? Jak jim může učitel pomoci, aby obtíže překonali?
- Kolik statistických údajů a jaké povahy představuje tato aktivita? Jak lze podchytit zájem žáků a orientovat je na přijatelnou úroveň odhadu?

Dva ze studentů, kteří již v té době vykonávali pedagogickou praxi, provedli pak pilotáž přímo na základní škole: to jim umožnilo jednak pracovat se žáky, které již znali, a také začlenit aktivitu do běžných osnov matematiky. Návrh přípravy, který byl v předběžné diskusi jen nastíněn, byl nyní upraven a zapracován do specifického kontextu výuky; experimenty byly provedeny ve dvou 6. třídách ke konci školního roku.

Žáci ve věku 11-12 let (21 v jedné třídě, 26 ve druhé) dostali za úkol změřit určité veličiny, které nějak souvisely s lidským tělem (výška, váha, délka paže nebo nohy,…), porovnat takto získané údaje (v jednom případě pomocí kalkulačky, v druhém pomocí EXCELu) a hledat konstanty nebo významné korelace. Žáci měli po prostudování Leonardových návrhů odpovědět na následující otázky: *Existuje stálý, konstantní poměr mezi některými anatomickými mírami? A co například mezi výškou a váhou? Jestliže poměr není konstantní, co to znamená a co se nám tím naznačuje?*

Nakonec studenti, budoucí učitelé, kteří provedli pilotáž, referovali o experimentu svým kolegům a komentovali i některé z hypotéz, které byly zformulovány v předchozí debatě.

Nakonec bylo navrženo několik aktivit na prohloubení učiva: k nejdůležitějším patří návrh na propojení aktivity s přírodovědným učivem při studiu tělesného vývoje dítěte nebo také návrh na spojení s učivem dějepisu při pátrání po zachovalých dokladech o starších jednotkách měr a vah na místních tržištích.

PREZENTACE

Téma měření skýtá nespočet námětů na aktivity, které představují žákům matematický obsah prostřednictvím konkrétních činností. Ty se neomezují jen na teoretická témata, jako je délka, váha nebo povrch, ačkoliv v reálné výukové praxi se bez těchto veličin z praktických důvodů nemůžeme obejít. Každodenní život před nás stále staví problémy spojené s měřením. Existují ovšem i situace, v nichž se ukazatele míry od sebe značně liší co do velikosti i významu: burzovní indexy, různé velikosti oblečení a obuvi, peníze, statistické indexy,… Ve snaze po dosažení maximální možné přesnosti se nám neustále nabízejí nové a přesnější měřicí přístroje: příkladem za všechny je posun od manuálního k elektronickému měření času při sportech, jako je např. atletika, lyžování aj.

Tyto úvodní poznámky naznačují jen některé z mnoha aspektů měření a navrhují možný didaktický přístup.

Pokud měření znamená určení čísla, které vyjadřuje poměr mezi danou veličinou a předem určenou jednotkou míry, lze u každého předmětu provést různá měření, která závisí na „kvalitě" předmětu, který chceme měřit: různé typy a pomocí různých „přístrojů", od lidského oka až k těm nejsložitějším zařízením. Ačkoli klademe důraz na významnou a zásadní roli, kterou přístroje sehrávají, snažíme se zde vlastně o jejich „demytologizaci". Žádné absolutně dokonalé měřicí přístroje neexistují. Proto veškerá měření, která budeme provádět, budou vždy jen přibližná. Stejně tak existují na koncích měřicí stupnice změřitelné, ale i nezměřitelné veličiny, atd.

Je také dobře známou skutečností, že před tím, než byly zavedeny dnes používané jednotky míry, prošlo lidstvo dlouhou etapou, kdy se jednotky míry určovaly libovolně a pouze pro komerční účely, standardizace existovala pro společný trh. Používání odlišných jednotek míry nepředstavuje žádný problém, pokud máme za cíl jen srovnání nebo nevyslovené zařazení. Pokud ale chceme sdělit výsledky získané měřením ostatním lidem, nebo chceme prostě jen porovnat předměty umístěné daleko od sebe, sdělení se stane problémem. K přesnému vyjádření vztahu mezi různými mírami a ke sdělení výsledku měření ostatním potřebujeme tedy standardní jednotku, stejnou pro všechny. Používáním smluvených jednotek míry se dostaneme ke správné definici míry a jejímu významu pomocí čísla, za nímž následuje údaj o jednotce (cm, kg, l, ...). Tak se jednoznačně určí kvantitativní stránka určitého předmětu (rozměry, váha, kapacita-objem,…).

S mnoha žáky je však třeba jít ještě dál; obecně vzato, mnohým z nich chybí intuitivní představa o hodnotě míry (*jak široké je okno?, jak vysoký je dům? kolik lahví vody bychom potřebovali, kdybychom chtěli z naší třídy udělat bazén?*).

Prvním krokem jiného didaktického přístupu by mohla být úvaha na téma správné používání určitých specifických výrazů, termínů, které objasňují dvojsmyslnost některých slov převzatých z hovorového jazyka s ohledem na to, jak se používají v různých kontextech (např. v běžném hovoru užíváme slova jako „velký, malý" v souvislosti s rozměrem, ale i věkem, slovo „kapacita" ve vztahu k inteligenci, ale i objemu, …). Nebylo by od věci přizvat učitele dějepisu, aby naznačil historický vývoj[1], který vedl od Obchodní revoluce ve 13.-14. stol. k ustavení Výboru pro váhy

[1] Oblast Toskánska je stejně jako mnoho jiných v Evropě bohatá na příklady prvních „smluvených" jednotek míry: má vlastní označení délky, váhy a objemu, která se nacházejí na náměstích, kde se tradičně konaly trhy.

a míry za doby Francouzské revoluce[2] a později k zavedení našich dnešních jednotek pro míry a váhy.

Stará označení jednotek délky a objemu na místních tržištích

Aktivita vyzkoušená při tomto experimentu – provádění anatomických měření – odkazuje tedy na jedné straně na možnost historického přístupu, na druhé straně přináší úvahy o smyslu měření.

V kursu Didaktika matematiky, který má dvouhodinovou dotaci, byla aktivita předložena studentům poté, co měli čas se seznámit s pracovními listy EXCEL a jejich používáním a také s tématy jako např. veličiny numerické syntézy, regresní přímka a korelační koeficient v kursu Statistika. Přestože statistická témata nejsou pro zvládnutí aktivity nezbytná, je dobré, aby se učitelé seznámili alespoň se základními pojmy, aby dokázali hlouběji porozumět spojovacím článkům mezi jednotlivými údaji.

AKTIVITA SE STUDENTY UČITELSTVÍ

Studenti pedagogického směru (SSIS) dostali v úvodním semináři několik příkladů „smluvených” měr, které se v této lokalitě (Florencie a okolí, Itálie) používaly v uplynulých staletích, před zavedením Mezinárodního systému měr. Pak měli za úkol nastínit některé aktivity, které by pomohly žákům uvažovat o užitečnosti standardních smluvených měr. Soustředili se přitom na problematiku délky a určování důležitých vzdáleností.

V průběhu diskuse poukázali studenti na fakt, že v minulosti lidé často brali za základ pro měření délky různé části lidského těla, celé tělo pak jako jednotku váhy. Bylo to samozřejmé. Je totiž „výhodné” mít pomůcku k měření stale při sobě (pro měření délky je paže jistě lepší než obvod hrudníku…); subjektivní hodnoty získané pomocí těchto „pomůcek” ale zároveň jaksi znehodnocovaly míru samu a poukazovaly na nutnost hledat cestu k objektivnímu měření. Ale je tu námitka: existují „anatomické konstanty”? Rádi bychom řekli, že ne, a podíváme-li se na hodnoty daných veličin, bylo by to správné. Studenti ale viděli, že situace se může změnit, když se podíváme

[2] Členy výboru byli i přední matematici, např. Lagrange, který výboru předsedal. Jemu vděčíme za rozhodný příklon k přijetí desetinné soustavy.

na poměr mezi veličinami[3]. A nyní jsme poukázali na známý text Leonarda da Vinci o Vitruviově figuře.

Studenti se všimli, že většina Leonardových tvrzení se netýká měr samotných, ale poměru mezi nimi. Tento postřeh je ostatně přirozený: kterákoli práce pojednávající o pojmech kvantity a míry, ať už má vztah k matematice (délka úsečky, velikost úhlu), nebo k přírodním vědám (hmotnost, váha, tlak, absolutní a relativní vlhkost ovzduší), brzy přivede hovor na téma poměr. Pojmově vzato, míra sama je vlastně poměr. Totéž nastane při zpracování dat získaných statisticky, při určování aritmetického průměru, mediánu a výpočtu procentové části.

Poměr však často zachází s heterogenními veličinami, a není proto vždy snadné či vhodné se v hodinách matematiky na 2. st. ZŠ zabývat novými veličinami, které poměr definuje, a správnými jednotkami míry. Proto se v úvodní fázi experimentu ukázalo, že je dobré a podnětné pracovat s homogenními veličinami z Leonardova textu (a získat tak jako poměr čísla ve tvaru zlomku).

Další zajímavou myšlenkou je možnost geometrické interpretace konstantní hodnoty, s níž takový poměr pracuje: veličiny by pak byly přímo úměrné, což by se dalo snadno zkontrolovat v rovině komplexních čísel, a to buď přímo, nebo s využitím elektronických pracovních listů.

Studenti přispěli k volbě některých tvrzení, která se jim jevila jako vhodná pro ověření formou experimentu:

„Délka rozpažených rukou člověka je rovna jeho výšce."
„Od lokte ke konci ruky, to je asi pětina výšky člověka".4
„Od spodku brady k temeni hlavy, to je jedna osmina výšky člověka."

Ve zbývající části semináře studenti měřili jeden druhého a pak přenášeli míry na pracovní listy EXCEL, aby si ověřili, zda je Leonardova hypotéza správná.

Studenti měří jeden druhého

[3] Studenti dostali za úkol provést samostatný výzkum a použili při něm znalosti z anatomie (zde je třeba připomenout, že studenti, kteří se danou aktivitou zabývali, jsou absolventy přírodovědných oborů, někteří z nich studovali biologii, a mají tak poznatky z komparativní anatomie). O spolupráci požádali i učitele dějepisu, výtvarné a tělesné výchovy.

[4] Toto tvrzení vede k zajímavé debatě: první měření poskytla zcela jiné výsledky, než studenti očekávali (poměr byl blíže ke 4 než k 5). Bylo nezbytné znovu důkladně pročíst text a prostudovat přiloženou kresbu. Pak teprve si studenti všimli, že proto, aby dokázali správně měřit, si musí nejprve ujasnit význam výrazu „konec ruky".

"Vetruvio architetto mette nella sua opera d'architettura che lle misure dell'omo sono dalla natura disstribuite in quessto modo. Cioè, che 4 diti fa un palmo e 4 palmi fa un pie: 6 palmi fa un cubito, 4 cubiti fa un homo, e 4 chubidi fa un passo e 24 palmi fa un homo; e cqueste misure son né sua edifizi. Se ttu apri tanto le gambe che ttu cali da capo 1/14 di tua alteza, e apri e alza tanto le braccia che colle lunghe dita tu tochi la linia della sommità del capo, sappi che 'l cientro a sinistra e a destra della scala metrica delle stremità delle aperte membra fia il bellico, e Ilo spazio che si truova infra Ile gambe fia triangolo equilatero diti palimi palmi diti. Tanto apre l'omo ne' le braccia, quanto è lla sua alteza. Dal nasscimiento de'capegli alfine disotto del mento è il decimo dell'alteza de l'uomo. Dal disotto del mento alla somità del capo è l'ottavo dell'alteza de l'omo. Dal disopra del petto alla somità del capo fia il sexto dell'omo. Dal disopra del petto al nasscimiento de capegli fia la settima parte di tutto l'omo. Dalle tette al di sopra del capo fia la quarta parte dell'omo. La magíore largheza delle spaffi contiene in sé (*la oct*) *la quarta parte dell'omo. Dal gomito alla punta della mano fra la quarta parte dell'omo. Da esso gomito al termine della ispalla fa la ottava parte d'esso omo. Tutta la mano fa la decíma parte dell'omo. Il membro virile nasscie nel mezo dell'omo. Dal disotto del pie al disotto del ginochio fia la quarta parte dell'omo. Dal disotto del ginochio al nasscimento del membro fia la quarta parte dell'omo. Le parti che ssi truovano infra il mento e 'l naso e 'l nasscimento de' capegli e quel de' cigli, ciascuno spazioper sè è ssimìle all'orecchi*(*i*)*o, è 'l terzo del volto.*[5]"

Architekt Vitruvius ve své práci o architektuře uvádí, že měření lidského těla ukazuje následující vztahy, „4 prsty představují dlaň a 4 dlaně představují 1 stopu, 6 dlaní představuje 1 loket; 4 lokte pak přestavují výšku člověka. A 4 lokte představují jeden krok a 24 dlaní představuje celého člověka. Délka rozpažených rukou člověka je rovna jeho výšce. Od vlasové linie ke spodku brady je to desetina lidské výšky; od spodku brady k temeni hlavy, to je jedna osmina jeho výšky; od vršku prsou k vlasové linii je to asi sedmina celého člověka. Od bradavek k temeni hlavy, to je asi čtvrtina člověka. Největší šířka v ramenou je rovněž jako čtvrtá část člověka. Od lokte ke konci ruky, to je asi pětina výšky člověka; a od lokte do úhlu podpažní jamky, to je osmina člověka. Celá ruka je asi desetinou toho člověka. Vzdálenost od spodku brady k nosu a od vlasové linie k obočí je vždy táž, a stejná jako ucho, to jest třetina obličeje.[6]"

V následné diskusi studenti nejprve odpovídali na dotazy, které se zaměřily zejména na didaktické aspekty právě provedené aktivity:

- Jaké kompetence vyžaduje tento typ aktivit? Jaké předběžné vědomosti a dovednosti jsou zapotřebí? O jaký druh učení tu jde?
- S jakými obtížemi jste se při této aktivitě setkali? Myslíte si, že žáci budou mít ještě jiné, další problémy? Jak jim může učitel pomoci, aby obtíže překonali?
- Kolik statistických údajů a jaké povahy představuje tato aktivita? Jak lze podchytit zájem žáků a orientovat je na přijatelnou úroveň odhadu?

[5] Leonardo da Vinci, Le proporzioni del corpo umano secondo Vitruvio, disegno, 1485-1490 (Venezia, Gallerie dell'Accademia – Gabinetto dei Disegni e stampe); cat. 228

[6] Text z: The Notebooks of Leonardo da Vinci, sv..č.1 (vydání ve dvou svazcích, paperback) str. 182-3, Dover, ISBN 0-486-22572-0 (J.P. Richter; původní vydání 1883).

Aktivita sama vedla přirozeně k diskusi o rozsahu přesnosti zjištěných měr, protože Leonardova hypotéza obsahuje zlomky, zatímco jejich přiřazování k hodnotám zjištěným v průběhu aktivity v zásadě záleží na akceptovaném odhadu. Toto je značně choulostivá záležitost, což více než potvrdila zkušenost s aktivitou ve škole: studenti provedli aktivitu s dobrým odhadem, zatímco míry žáků ZŠ vykazovaly větší variabilitu a vyžádaly si tudíž další upřesňování, než se mohly dále využít.

Studenti znovu uvedli, jak by se dal tento výzkum rozšířit: navrhli, aby se z takto získaných údajů vypočítal medián, standardní odchylka a další syntetické veličiny.

Další dotaz „na základě těchto měření, jaké významy nabývají v tomto případě výrazy *velký, malý, silný, slabý …*?" ukázal, že mají-li žáci odpovědět na dané otázky, jsou další měření nejen možná, ale v tomto kontextu nezbytná, a že prezentace poměru mezi nehomogenními veličinami a tedy dimensionálními jednotkami míry se jeví jako zcela přirozená. Nemůžeme např. definovat sílu nebo slabost jedince, aniž bychom nejprve zavedli pojem tělesná hmotnost vyjádřená v g/cm. Tato nutnost vyvstane do popředí ještě více, stanovíme-li si za cíl prezentaci tématu poměr mezi nehomogenními veličinami.

Před začátkem experimentu v prostředí 2. stupně ZŠ jsme také řešili problém, zda je z psychologického hlediska pro žáky tohoto věku vhodné zabývat se takovou činností, jako jsou anatomická měření; studenti navrhli určité didaktické postupy, jak by se dali zapojit všichni žáci, aniž by se někdo z nich cítil trapně. Měli bychom však také uvést, že práce se žáky byla opravdu místy obtížná (jak už to bývá), a studenti situaci podcenili. Při experimentu ve třídě se podařilo problémy odstranit teprve tehdy, když se sám učitel zapojil do hry a nechal žáky, aby ho změřili. To mělo pak příznivý dopad jak na úspěch aktivity, tak na celkové klima ve třídě.

PILOTÁŽ VE ŠKOLE

K realizaci experimentu v průběhu pedagogické praxe byli ze studentů pedagogického směru SSIS vybráni dva dobrovolníci, kteří měli učit ve dvou šestých třídách. Diskuse v plénu schválila návrh přípravy na hodinu a zapracovala ho do rozvrhu pro každou třídu zvlášť. Třídní učitel a druhý student, kteří sledovali pilotáž, měli za úkol věnovat pozornost jevům, na které poukázala diskuse, a také ověřit hypotézy o pravděpodobných problémech a významu aktivity.

Vzhledem k tomu, že se experiment odehrával na konci školního roku, byly některé dílčí aktivity poněkud zkráceny ve prospěch naléhavějších nebo významnějších věcí.

Následující pasáž přináší shrnutí závěrečných zpráv studentů.

6. třída, 3 hodiny práce, přítomno 26 žáků

Aktivita byla zařazena do 2. pololetí jako součást opakování zlomků a vybraných statistických veličin. Provádění takové činnosti, kdy žáci měří sami sebe i jeden druhého, je poměrně zábavné a představuje jakousi „mobilizaci emocí", která ulehčuje učiteli práci.

Při měření nastaly ihned jisté drobné potíže, a bylo zřejmé, že určité věci se dají řešit jen dohodnutým a zavedeným způsobem. Např. jak zjistíte vzdálenost od konce ruky k lokti: z vnitřní nebo vnější strany? Obdobné potíže se vyskytly při měření délky chodidla (samozřejmě, vyskytli se žáci, kteří se odmítli zout …) a také výšky žáka – u těch, kteří se nezuli. A žáci okamžitě zjistili, že míry se …velice liší, a to i mimo rámec chyb, na které snadno přišli sami, protože šlo o chyby vzniklé použitím nepřesných pomůcek (pravítko, příložník atd.): není přece možné, aby jeden kluk měřil zároveň 154, 156, 158 a 159 cm. Tento fakt (který ve skutečnosti vypověděl víc než dlouhá disertační práce o chybách při měření a přesnosti nástrojů ...) dal podnět k živé debatě, na jejímž konci se žáci shodli, že každé měření provedou tři žáci a že „oficiální" mírou se stane medián těchto tří měření[7].

Žáky obzvláště zarazila skutečnost, že u nich ve třídě má poměr mezi délkou chodidla a výškou těla procentní výskyt 78 % při hodnotě 0,15 (všimněme si, že 1/7 je asi 0,142 857…). Z nějakého důvodu je toto zjištění překvapilo více než jiné výsledky; v každém případě (a s podobnou přesností) tak ověřili platnost různých projevů poměru, které popsal Leonardo.

6. třída, 3 hodiny práce, přítomno 21 žáků

Protože šlo o nadprůměrnou třídu, učitel se domníval, že při práci se zlomky a průměrem nebudou mít žáci žádné velké problémy. Chtěl začít výkladem o úměrných veličinách: použil proto některé údaje, které mu poskytl kolega z výše uvedené třídy, a požádal žáky, aby experimentovali s jinými příklady poměru. Aby navodil potřebu zavést veličiny/jednotky, se kterými se žáci dosud nesetkali (v tomto případě g/cm, které byly dohodnuty na fakultě), navrhl učitel prostudovat poměr mezi obvodem pasu a výškou těla.

Co do kvality vykazoval tento poměr větší individuální variabilitu, přestože ve 43 % případů dosáhl hodnoty 0,48 (byla definována jako „kulaté bříško" …).

Učitel pak vyzval žáky, aby řekli, jak by mohli o více či méně „kulatém bříšku" získat přesnější představu. Žáci odpověděli, „stačí se podívat na váhu!"; učitel nenamítal, jen žáky vyzval, aby pokračovali.

Ve školní ordinaci, vybavené váhou a přístrojem na měření tělesné výšky, byli žáci vyzváni, aby se zuli. S pomocí spolužáků se pak zvážili a změřili. Do rozpaků upadlo jen několik (ti největší a nejmenší, nejsilnější a nejslabší); zkraje někteří požádali učitele, aby zaznamenal jejich váhy a míry tajně, ale pak se nechali unést všeobecným zaujetím pro věc. Jistě také pomohlo, že se i učitel (samozřejmě největší a nejsilnější) nechal dobrovolně zvážit a změřit.

Údaje o každém žáku (jméno, váha a míra) byly zaneseny do tabulky. Váha byla původně uvedena v kg a výška v metrech; později, když přišla řeč na poměr, byly tyto údaje převedeny na gramy a centimetry. V tabulce 1 najdeme příklady některých zjištěných hodnot.

[7] Když se tato hodina rozebírala v následujícím semináři na fakultě, nabídl se zajímavý dotaz: Jde o "skutečnou míru" měřeného subjektu? Žáci tuto hodnotu přijali za správnou, ale nikdo nedokázal vyloučit další omyly...

Tabulka zprvu neměla sloupeček pro vyznačení poměru. Pro zavedení tohoto pojmu se učitel záměrně vrátil ke slovům silný a slabý a požádal žáky, aby řekli, koho považují ve třídě za silného či slabého. Žádost vyvolala prudkou hádku: Claudia a Chiara P. obě vážily 49 kg, ale bylo zřejmé, že ta první je o hodně slabší. Takže pouhá váha není dobrým ukazatelem „síly"; bylo ale také hned vidět, proč to tak v případě těchto dvou dívek je: Chiara měřila 1,58 m, zatímco Claudia jen 1,50 m. Srovnání nebylo ale tak jasné u všech dvojic a šlo přece o srovnání kvality, zatímco učitel trval na srovnání kvantity, a to pomocí měření síly každého žáka.

Je zajímavé, že ačkoliv žáci pracovali v tomto období se zlomky a prošli řadu cvičení na poměr, a přestože, jak bylo ostatně již uvedeno, to byla třída s nadprůměrným prospěchem, ani jeden ze žáků nepřišel na to dělit váhu výškou. Asi proto, že veličiny, se kterými pracovali, nebyly homogenní. Nakonec proto dělení navrhl učitel a žáci s pomocí kalkulaček doplnili do tabulky třetí numerický sloupeček.

Žák	**Tělesná váha (v gramech)**	**Výška (v cm)**	**Poměr (odhadnutý)**
Alessandro	46.000	142	323
Chiara L.	34.500	147	234
Chiara P.	49.000	158	312
Claudia	49.000	150	326
Ester	26.000	122	213
Fabio	50.000	144	347
Francesco	42.000	145	289
Franco	31.000	141	219
Gianna	61.000	151	403
Giorgio	50.000	153	326
Giovanni	41.000	142	288
Giulia	45.000	148	304
Loretta	35.000	138	253
Marcello	45.000	150	326
Marco	41.000	142	359
Marta	33.000	136	242
Maurizio	59.000	148	398
Michele	48.000	145	331
Prof.	84.000	174	482 **MAX**
Sunita	51.000	153	333
Susanna	30.000	142	196 **MIN**
Yu Lin	38.000	144	263

Váha výška žáků ve třídě, kde se prováděla pilotáž

Nakonec učitel žáky vyzval, aby vysvětlili význam 312 g/cm (Chiara. P.) a 326 g/cm (Claudia). Někteří vyslovili názor, že dělit 39 000 gramů 138 centimetry je jako rozdělit uvedenou váhu na 138 dílů, z nichž každý bude mít 1 cm na výšku. Poměr se dá chápat jako vyjádření váhy pomocí váhy „bifteků, které by se daly nadělat z každého z nás" horizontálním řezem. Takové vysvětlení učitel přijal, jen upozornil, že by pak bylo nutné uvažovat o žácích, kteří jsou dokonale válcovitého tvaru a tvoří je homogenní, tj. stejnorodá látka, a také si ujasnit, že jde o „průměrný biftek" (což učiteli umožnilo vrátit se k pojmu „aritmetický průměr").

Nakonec každý žák porovnal svůj „průměrný biftek" s ostatními; samozřejmě, největší biftek patřil učiteli matematiky: vážil skoro půl kila!

V této fázi měly obě třídy za úkol vyjádřit dvojice dosud získaných hodnot pomocí dvojic souřadnic bodů v rovině komplexních čísel. První pokus provedli rukou: je samozřejmé, že tak malý počet měr si vyžádal nějakou pomůcku, ale byla to dobrá příležitost předvést žákům používání papírových archů pro grafické znázornění a pojem zmenšování a zvětšování v měřítku. Zde učitelé viděli výsledky předchozích debat o chybách při odhadu: dokonce i ti nejslabší žáci dávali při znázorňování velký pozor, aby je provedli co nejpřesněji.

Znázorňování vztahů tak, jak je navrhl Leonardo, nezpůsobilo žádné další potíže a žáci dokázali zjistit existence dané přímé úměrnosti. Naproti tomu více problémů vzniklo při znázorňování vztahu váha – výška, kde bylo nejdřív zapotřebí stanovit různá měřítka pro dvě kartézské osy. Na konci žáci získali množství bodů, což ukázalo, že žádná jasná představa o úměrnosti mezi dvěma veličinami prostě neexistuje[8].

NÁSLEDNÁ ANALÝZA ŠKOLNÍHO EXPERIMENTU

Poté co studenti poreferovali o svých zkušenostech při pilotáži v obou třídách, diskuse se soustředila na obtíže, se kterými se jako učitelé setkali, a na to, jak téma dále zpracovat.

Studenti si všimli, že aktivita probudila přirozeným způsobem zájem žáků o učivo z matematiky a statistiky (odhad, grafické znázornění), pro které je jinak těžké žáky motivovat.

NÁVRHY NA DALŠÍ VYUŽITÍ

Na konci závěrečné diskuse jedna ze studentek (nedávno se stala matkou) navrhla aktivitu, která by dobře navazovala na daný experiment. Přinesla dva výtisky běžných záznamů o novorozencích s vyznačením vývoje v procentech (různé pro chlapce a děvčátka) pro dva z ukazatelů, jimiž jsme se zabývali. Na těchto formulářích se dají vyplňovat naměřené údaje. Pro školní žáky by to byla možnost, jak doma získat údaje o jejich vlastním vývoji, což by se pak dalo znázornit graficky.

Tato aktivita by se dala využít v hodinách matematiky pro výklad pojmů graf, funkce procenta. Byly by to konkrétní příklady, velmi blízké zájmům žáků; v hodinách přírodovědy (pravděpodobně s pomocí školního lékaře) by se aktivita dala využít k prezentaci pojmů „vývoj tělesné soustavy" a ponětí o čase a individuálních změnách tělesného vývoje.

---

[8] Zde byla práce ukončena, ale nebylo by v této chvíli nijak těžké vyložit korelační koeficient a nakreslit možnou regresní přímku mezi dvěma veličinami pomocí elektronických pracovních listů. Tato témata však přesahují rámec úrovně školy, o níž je tu řeč. Stojí však za to uvést podobnou zkušenost s patnáctiletými žáky, kde jsem se snažili hledat možné vzájemné vztahy mezi výškou a váhou (asi 0.8 pro danou skupinu žáků), mezi výškou a průměrnou známkou z matematiky (mnohem méně než 0.5) a mezi váhou a dílčími známkami z matematiky (v tomto případě ne bezvýznamné: více než 0.65…..). Zajímavé náměty do diskuse o významu a hodnotě statistických korelací.

K rozšíření experimentu byla navržena ještě jedna aktivita, která by jednak ověřila další Leonardova tvrzení o anatomii lidského těla, a jednak, ve spolupráci s učitelem výtvarné výchovy, zkoumala poměr na antických sochách (kresby pravděpodobně také přístupné na Internetu). Dále bylo navrženo, že při využití internetových stánek a organizaci kratších exkursí v místním kraji (Toskánsko), by mohli studenti objevovat stopy prvních, v dané lokalitě smluvených jednotek míry a porovnat např. „loket", používaný jako délková míra na různých trzích, se skutečnou délkou paže. Pak by se dalo navázat studiem statistických údajů o nárůstu průměrné výšky a váhy člověka v průběhu staletí. I výzkum s použitím starých rodinných fotografií by napomohl žákům spojit pozorování s prověřováním hypotéz.

DOPORUČENÁ LITERATURA

Boyer, C. B. (1990). Storia della matematica. Milano: Mondadori.

Bussagli, M. (1999). A misura d'uomo. Leonardo e l'Uomo Vitruviano. Art e Dossier, Giunti Editore. [http://matematica.uni-bocconi.it/leonardo/uomo.htm#_ftn1]

Cambi, F. et al. (2001). L'Arcipelago dei saperi II, Area Matematica. Firenze: Le Monnier.

Ferrari, D. (2005). Qualità nella misurazione: introduzione alla metrologia e guida applicativa. Milano: Franco Angeli.

Piscitelli, M., Piochi, B. et al. (2001). Idee per il curricolo verticale. Progettare percorsi in Lingua, Matematica e Storia. Napoli: Tecnodid.

UMI-CIIM (2001). Matematica 2001, Materiali per il XXVII Convegno Nazionale sull'Insegnamento della matematica. Lucca: Liceo Scientifico "A. Vallisneri".

Druhá pilotáž

Yves Alvez*, Jean-François Chesné* a Marie-Hélène Le Yaouanq*

PREZENTACE AKTIVITY NA PEDAGOGICKÉ FAKULTĚ

Tato aktivita se zabývá sběrem a analýzou dat a ukazuje, jak se vysokoškolští učitelé v přípravě budoucích učitelů matematiky snaží spojit několik vzdělávacích modulů.

Studium na pedagogické fakultě IUFM v Creteil, Francie, absolvuje ročně něco mezi 50 a 80 mladých lidí, kteří se chtějí stát učiteli matematiky na základní nebo střední škole (PLC2). Studium zahrnuje i 42 hodinový kurs Matematika ve školní praxi (modul A). Tento modul vede studenty učitelství za doprovodu odpovědného pedagoga cestou objevování učitelské profese a umožňuje jim vybudovat si svou profesní dráhu tím, že jim poskytuje nástroje k výuce a pedagogické i didaktické prvky reflexe (osnovy, zpracování dlouhodobých plánů výuky, příprav na projekty

* Institut Universitaire de Formation des Maîtres – IUFM di Créteil, Francie.

a jednotlivé vyučovací hodiny, hodnocení, vědomosti o individuálních rozdílech mezi žáky, dále učivo matematiky a specifické práce buď z algebry nebo geometrie …).

Studium zahrnuje rovněž modul Pravděpodobnost - Statistika (modul S), který tvoří 12 povinných a 6 volitelných hodin. Cílem tohoto modulu je motivovat studenty k zařazení statistiky do studia a výuky matematiky na základní a střední škole.

Organizace tohoto modulu vyžaduje od studentů samostatnou práci na počítači za účelem obeznámení se s využíváním programu na zpracování tabulek (spreadsheet) a grafických softwarů pro statistiku (integrované funkce, adresování, pojem proměnná, různé aspekty algoritmů atd.). Uvádí také příklady metodických postupů ke zkoumání grafických nástrojů a metod deskriptivní statistiky: numerické a grafické charakteristiky, srovnání a interpretace.

Jak je tomu při každém výcviku, zmíněný popis a reflexe se odehrávají ve dvou rovinách: směrem od vysokoškolského učitele ke studentům a v rovině, kdy se učitel zajímá o pedagogické pokusy svých studentů a jejich dopadu na školní žactvo.

Z toho důvodu specifikujeme své cíle a předběžná očekávání s ohledem na učitele, pak uvedeme danou aktivitu se studenty učitelství tak, jak se odehrála v letošním roce, tj. její vývoj od počátku do konce. Bude následovat analýza "a posteriori", opět ve dvou rovinách, tedy analýza aktivity odučené studentem při pedagogické praxi a dále obecná analýza aktivity v celé její šíři. Na závěr zformulujeme několik perspektiv, které nám byly nabídnuty jako pedagogům instituce IUFM v Creteil a jako členům projektu LOSSTT-IN-MATH.

ANALÝZA A PRIORI

Toto téma (které projektu LOSSTT-IN-MATH navrhla IUFM v Creteil a které se úzce váže k návrhu nazvanému Tělesné míry) spojuje dva klíčové aspekty výuky statistiky na základní a střední škole. První můžeme definovat v intencích matematického obsahu, který se mají žáci naučit (viz osnovy a úřední směrnice). Druhý si klade za cíl rozvoj kritické reflexe u budoucích učitelů a jejich schopnost distancovat se od obsahu. Začlenění nových technologií, čemuž je věnována polovina modulu, figuruje samozřejmě i v této didaktické aktivitě.

Co se týká postupů, byly vypracovány s ohledem na procvičování a ne pouhý výklad, s cílem působit jak na kognitivní, tak na zprostředkovací komponenty výuky.

- Pro další upřesnění, naše cíle pro tuto aktivitu jsou:
- Obeznámit studenty učitelství s používáním programu na zpracování tabulek (spreadsheet) a ukázat jim jeho hodnotu jako pomůcky při výuce.
- Nechat studenty chovat se jako žáci tak, že je požádáme, aby sami splnili ty úkoly, které pak budou při pedagogické praxi zadávat žákům ve svých třídách (*strategie modelování*).
- Zavést pojmy aritmetický průměr, standardní odchylka a koeficient variace pro soubor dat.

- Prezentovat historický dokument („figura Leonarda da Vinci") a použít ho jako pomůcku při studiu určených matematických pojmů.
- Napomoci studentům k účinnému předvedení dané aktivity se žáky v jejich třídách.
- Připravit budoucí učitele na případné využívání kalkulačky při výuce.

PRŮBĚH VÝUKY

Didaktická aktivita se odehrává ve 4 fázích.

- Dvě výukové jednotky (semináře) jsou věnovány zvládnutí práce s programem na zpracování tabulek (spreadsheet).
- V následujícím semináři se studenti věnují několika úkolům, jedním z nich je „figura Leonarda da Vinci".
- Jeden ze studentů učí hodinu matematiky ve škole.
- Návrat k ostatním studentům za účelem zpětné vazby.

1. fáze

Dva tříhodinové semináře jsou věnovány výhradně k tomu, aby se studenti obeznámili s různými funkcemi programu na zpracování tabulek - spreadsheet (a dalšího softwaru, který se vztahuje výslovně ke statistice). V průběhu prvního semináře učitel představí studentům technické aspekty a komponenty programu spreadsheet a jeho klíčové didaktické charakteristiky, jak je stanoveno v osnovách, a pak studenti dostávají řadu aktivit (zejména takových, které procvičují adresování). Druhý seminář je věnován specifickému využití programu spreadsheet ve statistice (statistické funkce a simulace náhodných experimentů). Každý ze seminářů je veden dvěma učiteli na skupinu asi patnácti studentů.

2.fáze

V průběhu didaktického semináře dostávají studenti tři aktivity, které se zaměřují na hodnocení rozptylu souboru a na pojem náhodnosti. Mají se přitom chovat jako žáci.

3. fáze

Seminář, z něhož byl pořízen videozáznam, se konal ve třídě, kde jeden ze studentů vykonává pedagogickou praxi. Hodina proběhla bez zásahu ze strany školy. V průběhu předběžného setkání, bezprostředně před hodinou, představila studentka svou třídu a svůj projekt jednomu z vysokoškolských učitelů. Podobným způsobem pronesla po skončení výuky několik okamžitých připomínek k průběhu hodiny.

4. fáze

Fáze návratu do cvičného modulu se konala později, aby bylo možné dodržet program výcvikového postupu. Studentka, která učila hodinu ve škole, se podělila s ostatními o své pocity z hodiny i videozáznamu a podala krátkou analýzu a posteriori své hodiny. Do její prezentace vstupovali ostatní studenti s dotazy.

Podobně jako v běžné výuce modulu „Úvod do úměrnosti v geometrii” se videonahrávky studentů nepoužívají ani zde, protože tato forma práce nebyla původně v plánu a nedala se dodatečně zařadit.

„HOMOLOGIE”: VÝCVIK MODELOVÁNÍM

Krátká poznámka k pojmu modelování

Učitelé přenášejí svá různá pojetí výuky matematiky tím, že je uvádějí do praxe v seminářích a jiných hodinách, které učí. Od studentů se naopak očekává, že se zkušenosti ze seminářů, kde se chovali jako žáci, odrazí v jejich vlastních vyučovacích pokusech. Strategie modelování se liší od strategií kulturních (kdy vysokoškolský učitel předává určitou informaci), od strategií demonstračních (kdy učitel předává dovednost učit tím, že učí své předměty efektivně) i od strategií transferu či přenosu (kdy učitel předává referenční vědomosti o vyučování a snaží se využít fenoménu transferu, který pak prosazují studenti ve výuce).

Didaktický seminář (45 minut) [*z tohoto semináře byl pořízen videozáznam*]

Učitel studentům rozdal kresbu figury Leonarda da Vinci spolu s doprovodným textem (viz příloha). Studenti si rychle prohlédli oba materiály, učitel pak navrhl, aby se soustředili na jedno z tvrzení v textu „Tanto apre l'omo nelle braccia quanto e la sua alteza.” („Délka rozpažených rukou člověka je rovna jeho výšce.”) Studenti měli pak utvořit dvojice a změřit si navzájem délku rozpažených rukou (A) a výšku (H). Učitel jim ukázal, jak mají postupovat. Každý student pak vypočítal poměr R = A/H s přesností na 0.01 a přišel k tabuli anonymně zapsat takto získané hodnoty A, H a R. Učitel je upozornil, na co mají při experimentu dávat pozor. Druhý učitel mezitím přenesl data napsaná na tabuli do programu spreadsheet. Pak se zájem soustředil nestatistický soubor hodnot R a tehdy jeden ze studentů přišel s dotazem na rozptyl řady. Když byl určen rozptyl souboru, navrhli studenti vypočítat jeho aritmetický průměr a standardní odchylku: učitel využil této příležitosti, aby poukázal na rozdíl mezi standardní odchylkou vzorku a odchylkou platnou pro obyvatelstvo. Studenti provedli veškeré výpočty pomocí kalkulačky, zatímco jeden z učitelů udělal totéž na programu spreadsheet. Aby se dalo zpřesnit hodnocení rozptylu, jeden z učitelů navrhl, aby studenti vypočítali koeficient variace $\frac{\sigma}{\bar{x}}$ (bez rozměrů) a kladl jim otázky na možnou interpretaci, která se dá vyčíst z těchto tří parametrů. Bylo dosaženo cíle, tj. hledání možnosti ověření Leonardova tvrzení experimentem? Jaký význam lze připsat hodnotě koeficientu získané variace (≈4 %)? Dvě další aktivity zařazené do tohoto modulu (jedna s využitím věku studentů, druhá s tabulkami náhodných čísel, nám snad pomohou získat odpověď.

Po skončení aktivity učitelé informovali studenty o projektu LOSSTT-IN-MATH a pokusili se získat dobrovolníky, kteří by tuto látku odučili ve škole. Učitelé studentům také navrhli, že by téma měli podle svých zkušeností a představ upravit pro věk žáků ve třídách, kde učí při pedagogické praxi (obsah i metodický postup: např. pojem standardní odchylka nefiguruje v osnovách).

HODINA MATEMATIKY VE ŠKOLE *(50 MINUT)*

Prezentace kontextu [*z této hodiny byl pořízen videozáznam*]

Hodina matematiky na videozáznamu se konala v rámci projektu ‘Objevitelské cesty’ ve třetím ročníku školy Jeana Charcota de Fresnes, v departmentu Val de Marne. Škola, která má na 330 žáků a 25 učitelů, je spíše „malou” institucí.

Na rozvrhu je projekt ‘Objevitelské cesty’ pro žáky povinný. Je dotován 2 hodinami týdně a je určen pro všechny žáky prostředního cyklu školy (druhý a třetí ročník – tj. v ČR 2.stupeň ZŠ). Výuka je přiřazena k povinným předmětům a spojuje alespoň dva z nich, které jsou uspořádány kolem společného tématu, to pak přináleží k jednomu z následujících 4 oborů:

- Vědy o přírodě a člověku
- Krásná umění a společenské vědy
- Jazyky a civilizace
- Design a technologie

Každá ‘Objevitelská cesta’ trvá 12 až 13 týdnů a má hodiny určené pro výklad, samostatné učení, včetně praktické činnosti a hodnocení. Takže žáci prostředního cyklu projdou v průběhu školního dvěma ‘Objevitelskými cestami’ (kurs OC).

Jeden ze studentů praktikuje v kursu OC ve spolupráci s učitelem francouzského jazyka (tj. mateřský jazyk). V programu kursu je i téma „Cesta kolem světa”. Druhá část kursu využívá statistické údaje vztahující se k Evropské unii. Pokud jde o matematický obsah, sledují se tyto cíle:

- Číst a interpretovat grafy a diagramy.
- Provádět výpočty s celými čísly, frekvencemi, kumulovanými frekvencemi, kumulovanými celými čísly a vypočítat aritmetický průměr.
- Vyjadřovat statistické soubory jako kalkulační tabulky v programu spreadsheet nebo jako diagram.

Experimentální hodina se konala poté, co se žáci již seznámili s novými poznatky. Mohli proto bez problémů využívat vědomosti a dovednosti, které nabyli v kursu. Nakonec je třeba poznamenat, že žáci, kteří se experimentu zúčastnili, nejsou všichni z téže třídy: jsou zapsáni v různých paralelních třetích třídách a na dvě hodiny týdně se přeskupují (na hodinu s učitelem francouzského jazyka a na hodinu s učitelem matematiky).

Průběh výuky

1. fáze (*15 minut*)

Učitelka rozdává svým žákům pracovní listy a promítá kresbu Leonarda da Vinci. Klade několik otázek, nejprve o Leonardovi, pak o kresbě: žáci společně procházejí čtvercem, sledují paže a barevné vyobrazení celého člověka od hlavy k patě. Také učitelka sleduje linie promítané kresby a pak vyzývá žáky, aby uvažovali o tom, co vidí. Se stálou dopomocí učitelky si žáci všimnou, že rozpětí mužových paží se rovná jeho výšce. Jeden žák je vyslán k tabuli, aby zapsal shrnující větu: „Výška člověka a rozpětí paží jsou si rovny.”

2. fáze (***15 minut***)

Poté, co jeden ze žáků přečte zadání, učitelka spolu s dalším žákem předvádí úkoly, který pak mají splnit všichni. Pak žáci vstanou, utvoří dvojice a měří jeden druhého. Učitelka dovoluje čtyřem děvčatům zůstat pohromadě, koluje mezi žáky, některým pomáhá. Jakmile jsou měření u konce, žáci se vracejí na svá místa, aby vypočítali poměr.

3. fáze (*20 minut*)

Učitelka rozdává žákům druhý pracovní list a zapisuje na tabuli získané poměry. Zdá se to najednou divné, že několik žáků uvádí jako hodnotu A/H číslo 1. Žáci určují minimum a maximum získaného souboru, a pak vypočítávají jeho průměr (je to skutečně 1!). Učitelka se pak snaží žáky přimět, aby se znovu podívali na to, co právě udělali, dává jim otázky, které se týkají zejména významu A/H. Tuto fázi končí následující zápis na tabuli: „Poměr je ve všech případech přibližně roven 1. Rozpětí paží a výška jsou proto podobné.”

Hodina končí tím, že učitelka zadává domácí úkol, který mají žáci udělat do příště.

HODINA MATEMATIKY VE ŠKOLE - ANALÝZA A POSTERIORI

Žáci sedí ve třídě v půlkruhu.

Pracovní listy pro žáky byly připraveny velmi dobře, příprava na hodinu (viz příloha) správně předvídala jednotlivé fáze, které si učitelka naplánovala, správné bylo i časové rozvržení hodiny.

Pokyny pro celou třídu, které učitelka zadala, jsou velmi strohé, tón hlasu pevný. Učitelka nicméně často a laskavým způsobem poskytuje individuální pomoc.

Protože různé příklady na poměr byly napsány na tabuli, pro určení průměru souboru poměrů používají žáci většinou a správně kalkulačku. Dalo by se ale pochybovat, zda byla ve třetím ročníku na místě a priori volba poměru A/H: určité otázky, které někteří žáci kladli v průběhu hodiny, jsou odrazem jejich dosti vágní představy o vyjádření vztahu A/H = 1, když A = H. Zdá se, že žáci nepochopili, s jakou přesností má smysl uvádět čísla, se kterými se počítá.

Vlastní průběh hodiny se odvíjel podle přípravy, kterou si učitelka udělala. (V průběhu schůzky, která následovala bezprostředně po hodině, učitelka sama prohlásila, že je „spokojená s tím, jak hodina probíhala”).

Přechod od pozorování kresby k ověřování hypotézy se odehrál z velké části za významné asistence učitelky a v poměrně krátkém čase. Dá se říci, že v zásadě tuto část hodiny měla pod kontrolou učitelka a žáci se chovali pasivně. Učitelka začala systematicky, odpovědi, které jí žáci dávali, byly takové, které od nich chtěla slyšet. Projevil se zde tzv. Topazův efekt. Podle toho by se dalo soudit, že to je její typický způsob, jak řídit průběh hodiny. Ale nakonec to, co se žákům mělo jevit jako hypotéza, kterou měli ověřit pomocí experimentu, se ve skutečnosti stalo jistotou, které je třeba se za každou cenu držet, a to i tehdy, když to znamená znovu měřit popř. dodatečně pozměňovat míry až na nejbližší mm, jak se to stalo u některých žáků.

ANALÝZA A POSTERIORI NA PEDAGOGICKÉ FAKULTĚ

Strategie modelování je určena především k tomu, aby se prezentovala taková výuková jednotka, kterou vysokoškolští učitelé považují za příklad k následování při pedagogické praxi ve škole. I tomto případě studenti považovali obsah a zvolené metodické postupy za doporučené a „schválené", aniž by učitelé dali motivy své volby výslovně najevo. Tím, že studenti přijali role žáků, byl vlastně naplněn cíl umožnit jim vyslovit pochyby o předepsaných úkolech, což by se pravděpodobně jinak nestalo.

Co tedy nyní vyplývá z hodiny odučené ve škole? Dokumentace platná pro pedagogickou praxi byla využita řádným způsobem, vedení žáků učitelem bylo zprvu dobré, ale didaktický problém, o který tu šlo a který byl prezentován v semináři na fakultě, naprosto chyběl: zatímco od studentů se čekalo, že budou pochybovat o platnosti Leonardova tvrzení a budou své pochybnosti prověřovat pomocí dostupných statistických nástrojů, žáci ve škole se pokusili jen „vstoupit do Leonardova čtverce". Ale umožnil jim průběh hodiny, kterou si připravila studentka – budoucí učitelka, chovat se jinak? Pravdou je, že bylo pro ni příliš těžké upravit hodinu, kterou absolvovali na fakultě tak, aby byla přiměřená žákům 2. st. ZŠ.

Učitelka pochopila absenci standardní odchylky jako nástroj (a tudíž variační koeficient) jako pouhé odstranění něčeho, co je nadbytečné, a to dodatečně vrhá vážné pochybnosti o volbě postupů, pro které se v této hodině rozhodla. Je tedy odůvodněné si myslet, že experimenty s měřením a výpočty poměru by se měly probírat před prezentací Leonardovy kresby a textu, aby si žáci opravdu mohli spojit učivo s existencí zákona, který stejně při úrovni svých vědomostí a ve svém věku nemohou ani potvrdit ani vyloučit. Jen mimochodem, tento postup spojený se souvislým výkladem by jen zdůraznil kritický přístup učitele a jeho schopnost ustoupit v průběhu vyučovacího procesu do pozadí, což je cílem, k němuž příprava budoucích učitelů směřuje.

POZNÁMKY

Hlavní problém, před nímž stojí vysokoškolský učitel v průběhu přípravy budoucích učitelů matematiky, je vědět, jaké profesionální kompetence jsou v praxi začínajícího učitele obecně nutné, a na co student přijde sám při pedagogické praxi. Je dnes dobře známo, jak důležité jsou v praxi pro učitele metakognitivní představy (o matematickém obsahu, o tom, jako tento obsah učit, o roli matematiky ve škole, o vztazích mezi učitelem a žáky …). Je také známo, že ne všechny precizně připravené vyučovací projekty, se dají v praxi použít, a tam, kde to možné je, ne všechny převede do praxe tentýž učitel (viz Robert).

Proto by tedy strategie modelování měly umožňovat kompromis a nabízet jak možnost navození situací, které mohou nastat ve skutečné třídě, tak příležitost, při níž studenti mohou zvažovat svá stanoviska (k nimž dospěli více či méně vědomě) k matematice a způsobu, jak ji mají vyučovat.

Aktivita, kterou jsme zde prezentovali, naznačuje, jak se zdá, jednu věc: i když určitá strategie umožňuje změnu postupů ve vedení žáků při vyučování a ve výběru aktivit, i když studentům umožňuje „udělat něco, co (podle nich) doopravdy ve třídě funguje", zdaleka to nestačí: studentce se nepodařilo vést hodinu tak, aby látka byla podána přiměřeným způsobem. Dalo se to dokázat při pedagogické praxi? Může v tom napomoci oborová didaktika? Před zahájením experimentu ve škole anebo po něm? Jak se dá v pregraduální přípravě učitelů využít video, aniž by to odrazovalo studenty, jejichž výuka by se natáčela? A v obecnější rovině, s jakými omezeními musí počítat pozorovatel/vysokoškolský učitel? Doufejme, že porovnání shodných a rozdílných rysů pedagogických experimentů, které provedly všechny partnerské instituce v rámci tohoto projektu a které se ukázalo jako všestranně přínosné, pomůže také odpovědět alespoň na některé z otázek, které tento výzkum položil.

DOPORUČENÁ LITERATURA

Alvez, Y., Le Yaouanq, M.-H., Chareyre, B., Careme, Y., Cleirec, N., Gastin, H., Guillemet, D. & Saint Raymond, C. (2003-2006). *Collection Math'x: seconde, collection Math'x 1S, collection Math'x TS*. Editions Didier.

Henry, M. (1994). *L'enseignement des probabilités: perspectives historiques, épistémologiques et didactiques*. IREM de Besançon.

Quetelet, L. A. J. (1864). *Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges*.

Robert, C. (2003). *Contes et décomptes de la statistique: Une initiation par l'exemple*. Éditeur Vuibert.

Vitruvius Pollio Marcus, *Architecture, ou Art de bien bastir*. French translation by Martin, J. (1547). París: Jacques Gazeau.

Třetí pilotáž (Skårup Seminarium, Dánsko) a Závěr

Brunetto Piochi

Jeden z hlavních problémů, před nimiž stojí vysokoškolský učitel v průběhu pregraduální přípravy budoucích učitelů matematiky, je spojit vědomosti a dovednosti daného předmětu (studenti v některých partnerských zemích je získali v průběhu předchozího studia, zatímco v jiných zemích je odborná a pedagogická příprava organizována konsekutivně, pozn. překl.) s profesionálními dovednostmi tento předmět vyučovat. Je dnes dobře známo, jak důležité jsou v praxi pro učitele metakognitivní představy (o matematickém obsahu, o tom, jak tento obsah učit, o roli matematiky ve škole, o vztazích mezi učitelem a žáky …). Strategie modelování by tedy mohly umožňovat kompromis a nabídnout jak možnost navození situací, které mohou nastat ve třídě, tak příležitost, při níž studenti mohou zvažovat svá stanoviska (k nimž dospěli více či méně vědomě) k matematice a způsobu, jak ji mají vyučovat.

Oba partneři výzkumného projektu LOSSTT-IN-MATH provedli pilotáž aktivity takovým způsobem, že tím byl vlastně dán příklad, jak využít strategie modelování. Studenti měli za úkol provést aktivitu v semináři tak, jak ji budou později vyučovat ve škole. Diskuse, která následovala, přivedla studenty k nutnosti strukturovat přípravu tak, že výuka brala v potaz nejen hlavní matematické aspekty měření, ale také některé (jak praktické, tak epistemologické) překážky, které studenti sami předem identifikovali. Úvodní praktická část, kdy se studenti navzájem měřili, fungovala jako silný motivační faktor (stejně tomu bylo pak při realizaci hodiny ve škole), aktivita v celé své šíři umožnila studentům zkušenost zažít většinu obtíží, s nimiž se pak při výuce setkali žáci: studenti sami se poněkud zdráhali dát k dispozici všem kolegům své soukromé údaje. Celá aktivita jim také pomohla připravit dokonalejší analýzu *a priori*. Když se pak ocitli v reálné situaci ve třídě, dokázali na nepředvídané překážky reagovat rychleji a správněji.

Rozdíly v pilotáži provedené ve dvou výše uvedených partnerských institucích spočívají v následujících skutečnostech:

- *fáze shromažďování dat*: IUFM využila tuto aktivitu, aby poskytla příklad, jak shromažďovat a analyzovat statistické údaje; SSIS ponechala studentům více svobody při organizaci, poněvadž cílem bylo strukturovat příklad aktivity laboratorního typu (pro obě partnerské instituce to byla také dobrá příležitost zdůraznit, že učitel může žákům dovolit „volný pohyb” po třídě)
- *otevření dané aktivity pro možnost jejího propojení s dalšími tématy*:
  - v IUFM: využití softwaru, čtení historického dokumentu a výchova k občanství;
  - v SSIS: obecný vztah a přístup k historii měření a úvod do problematiky poměru mezi nehomogenními veličinami.

Postup, který byl zvolen v SSIS, tedy nestrukturovat přísně analýzu shromážděných dat, umožnil v úvodní části experimentu, v práci se studenty učitelství, pracovat méně komplikovaným způsobem, který dal studentům větší možnost zapojení, zato však ve fázi srovnávání zkušeností z výuky ve škole nebyl pokus příliš účinný. S ohledem na situaci v kursech SSIS se tomu ale nedalo předejít, protože řada studentů (ne ale všichni), kteří kursy navštěvují, již vyučují v různých školách a každá mimoškolní aktivita musí být v souladu s danými osnovami. Naproti tomu v IUFM v Creteil jsou všichni studenti v prvním roce řízené pedagogické praxe a vede je zkušený pedagog - mentor. Ani tak nebylo pro ně ale jednoduché přizpůsobit aktivitu potřebám svých žáků.

Kromě těchto dvou pilotáží byl experiment částečně ověřen i v Dánsku - Skårup Seminarium (učitelka Helge Thygesen). V této pilotáži realizovali studenti pouze první část experimentu: měřili jeden druhého a diskutovali o tom, co zjistili. Prvním cílem bylo ověřit správnost hypotézy „Délka rozpažených rukou člověka je rovna jeho výšce." To se dalo snadno prokázat pomocí několika měření a jednoduchým pracovním listem EXCEL. Ale protože se studenti předtím zabývali tématem zlatý řez, požádala je učitelka, aby také ověřili, že poměr mezi výškou člověka a vzdáleností jeho pupku od země je obecně platný a rovná se zlatému číslu. Hodnocení, které po aktivitě následovalo, vedlo skutečně k závěru, že není pravděpodobné, aby existoval nějaký standardní poměr: jednotlivé výsledky se příliš lišily od toho, co studenti očekávali. Ale studenti znovu přišli na zajímavé souvislosti spojené jak s uměním, tak s matematikou.

Výuka ve Skårup skončila tím, že studenti hovořili o tom, jak by měření prováděly školní děti. Debatu uzavřeli konstatováním, že nechat děti měřit se navzájem je velmi dobrý nápad. Učitelé měli zato, že taková aktivita by žáky zcela jistě zaujala a mohla by i vyvolat zájem o staré dánské míry jako např. „favn“ a „fod“, které mají zřejmý původ v tělesných mírách.

Jednu věc je ale třeba zdůraznit: učitel na 2. st. ZŠ a na SŠ by měl být opatrný při probírání látky, která se jakýmkoli způsobem vztahuje k lidskému tělu; v obou předchozích kompletních experimentech bylo studentům doporučeno, aby se snažili vhodným pedagogickým přístupem předejít situacím, v nichž by se žáci cítili trapně. Výuka ve škole prokázala, k jak psychologicky obtížným situacím může dojít. Problémy byly zcela odstraněny až tehdy, kdy se učitel sám plně zapojil do hry; to byl klíčový moment: ve chvíli, kdy bylo nutno přijmout „rozdílnost" od obecně chápaných představ o tělesné zdatnosti, se učitel stal výchovným vzorem.

Navržená aktivita rozhodně dosáhla cíle, a to jak pro studenty, tak pro žáky; při pilotáži ve Skårup tomu bylo nejinak. Jak prohlásili studenti IUFM v Creteil, umožňuje tento typ aktivity zcela jistě (a v obecné rovině jakákoli aktivita, která motivuje ke strategiím modelování) oborovým didaktikům na vysokých školách, které připravují budoucí učitele, „předvést něco, co skutečně ve škole funguje". To ale nestačí: ne vždy se studentům podaří vést hodinu tak, aby látka byla podána způsobem, který je přiměřený všem žákům. Otázkou tedy zůstává, a to se týká vysokoškolských pedagogů, jak zefektivnit výuku oborové didaktiky a pedagogickou praxi, aby se dal tento problém překlenout.