

# GEOMETRICKÉ HÁDANKY

Franco Favilli\* a Carlo Romanelli\*\*

## ÚVOD

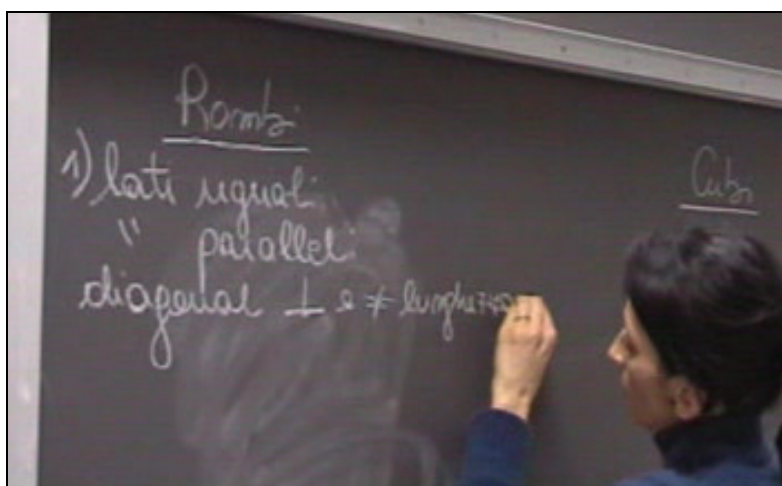
Geometrický diskurs vyžaduje dobré vědomosti a zvládnutí terminologie a pojmů. Na druhé straně však žákům při osvojování geometrických pojmů pomáhá, když se komunikace ve třídě opírá o vyvážené využívání grafického jazyka, přirozeného nematematického projevu a odborného jazyka geometrie.

Při navrhované aktivitě budou žáci pracovat ve dvojicích, přičemž jeden žák dává druhému sled pokynů pro náčrt geometrického útvaru. Oba žáci pak mají za úkol útvar popsat a definovat.

Tato aktivita pro výuku geometrie může být zajímavou příležitostí, jak zdůraznit potřebu využívat různé způsoby vyjadřování a cíleně je koordinovat pomocí vhodných úkolů, které umožňují využívat tyto registry střídavě.

Studenti učitelství si mohou prostřednictvím předloženého didaktického návrhu lépe uvědomit, jak je pro žáky náročné přejít od prostého popisu geometrického útvaru k jeho definici.

Tento návrh byl připraven a vyzkoušen v Itálii, na Universitě v Pise. Pilotáž byla současně provedena na Universitě v italské Sieně a později na pedagogické fakultě I.U.F.M. v Paříži.



\* Centro di Ateneo di Formazione e Ricerca Educativa – CAFRE, Università di Pisa, Itálie.

\*\* Istituto Comprensivo “E. Pea”, Seravezza (LU), Itálie.

## Hlavní pilotáž

Franco Favilli a Carlo Romanelli

### NÁVRH

Aktivita nazvaná *Geometriclé hádanky*, jak se zdá, koresponduje s dobrým způsobem zacházení s matematickými pojmy. Uvádí je pomocí směsi teoretických a praktických úkolů. Rozšíření a prohloubení učiva může snadno zavést debatu ve třídě mimo rámec běžných osnov pro výuku matematiky na 2. stupni základní školy. Pilotáž aktivity proto vyžaduje především definici specifických didaktických cílů a výběr jen několika z možných matematických pojmů pro výklad, popř. další využití (v případě, že je žáci již ovládají).

Na začátku hodiny dostanou žáci list papíru (Návod pro žáky, viz Příloha A) s vysvětlujícími poznámkami k obsahu a pravidlům této didaktické aktivity. Zde jsou základní pravidla:

- Žáci pracují ve dvojicích.
- Jeden žák z každé dvojice dostane lístek s názvem útvaru (geometrie nebo stereometrie). Do konce aktivity ho nesmí prozradit druhému žákovi.
- Pak první žák dává druhému sled pokynů jak narýsovat či nakreslit daný útvar.
- Jednomu slovnímu pokynu může odpovídat pouze jedna grafická činnost. Např. povoluje se pokyn „narýsuj úsečku“, nepovoluje se pokyn „narýsuj osu úsečky AB“, protože nejprve vyžaduje určení středu S úsečky AB a dále vztyčení kolmice k úsečce AB v bodě S.
- Oba žáci zapíší každý pokyn na list papíru.
- Pokud je třeba, pokyn lze zopakovat, nesmí se ale pozměnit ani vysvětlit.
- Pro rýsování či kreslení používají žáci čtverečkovaný papír a pero (žádná tužka, pravítko, ani kružítko apod.). Nepovoluje se gumování ani opravy.
- Nepovoluje se ukazovat nehotovou kresbu.
- Když skončí sled pokynů, druhý žák ukáže konečnou podobu nákresu prvnímu a porovná ji s názvem daného geometrického útvaru.
- Oba žáci mají pak za úkol říci název, popis a nakonec i definici daného útvaru.
- Aktivitu uzavírá diskuse s celou třídou. Porovnávají a hodnotí se nákresy i pokyny pro jejich vytvoření.

Tento postup je třeba zachovat jak v semináři pro přípravu budoucích učitelů matematiky tak při následné pedagogické praxi, kdy studenti učitelství pracují se žáky ve věku 2. stupně základní školy.

V Pise bylo vypracováno následující schéma pro přípravu a průběh pilotáže; pro každý krok je stanoven počet hodin:

Postup									
Učitelé VŠ (10 h)  Příprava didaktického návrhu	Učitelé a studenti VŠ (4 h)  Úvod Práce ve skupinách Diskuse	Studenti VŠ (2 h)	Studenti VŠ a žáci ZŠ (2 h)  Úvod Práce ve skupinách Diskuse		Studenti VŠ (2 h)	Studenti VŠ a učitelé VŠ (4 h)  Podávání zpráv z praxe Diskuse		Studenti VŠ (4 h)	Učitelé VŠ (5 h) Konečná zpráva
Cíle			Metodologie, kontext						
Krátkodobé	Vědomosti Kompetence	Promyšlení – příprava na hodinu	Studenti VŠ	Žáci	Promyšlení hodiny – Zpráva	Učitelé VŠ	Studenti VŠ	Promyšlení – Poznámky Dokončování	
Dlouhodobé	Metodologie Socializace		Vědomosti	Vědomosti Kompetence		Socializace	Socializace		Metodologie

## Všeobecné informace

Počet učitelů VŠ: 2 (autoři textu)

Počet studentů VŠ: 42

Počet tříd, které se zapojily do pilotáže: 2 (2. a 3. ročník, tj. jako naše 7. a 8. třída)

Počet žáků a jejich věk: 24 žáci ve věku 12 let (7. tř.) a 22 žáků ve věku 13 let (8. tř.)

Počet dospělých v každé třídě při výuce: 2 učitelé VŠ (v těchto třídách hospitovali poprvé) a vyučující.

## Cíle

Vzdělávací cíle této aktivity lze zhruba rozdělit na cíle všeobecné a matematické.

Za všeobecné cíle můžeme považovat:

- Rozvoj povědomí a kritických postojů k využívání jazyka a jeho interpretaci.
- Povědomí o důležitosti používání specifických a jednoznačných výrazů.
- Nárůst schopnosti žáků rozumět ústním pokynům a pracovat podle nich.
- Stimulace „kritického“ naslouchání pokynům.
- Zdokonalení dovednosti čtení s porozuměním, respektování a aplikace pravidel didaktické činnosti.
- Osvojení pojmu jednoduchý, nečleněný pokyn.
- Schopnost respektovat pracovní tempo spolužáků.
- Dovednost uvést důvod pro volbu postupů používaných v průběhu aktivity.

Za matematické cíle můžeme považovat:

- Zdokonalené využívání matematického jazyka.



- Posílení znalosti jazyka geometrie a stereometrie.
- Zlepšení dovednosti provádět nákresy.
- Upevnění vědomostí z geometrie a stereometrie.
- Schopnost představit si trojrozměrné předměty podle dvojrozměrného znázornění a dovednost znázornit těleso v rovině.
- Schopnost popsat základní geometrické a stereometrické útvary tak, aby vynikly vlastnosti, které jsou jak nezbytně nutné, tak postačující pro jejich definování.
- Rozvíjení schopnosti nacházet rovnováhu mezi popisem a definicí geometrického či stereometrického útvaru.
- Pochopení významu definice v geometrii.
- Schopnost porovnávat a vyhodnocovat různé typy informací v průběhu diskuse s ohledem na správné utváření pojmů v geometrii a stereometrii.

### Úkoly pro studenty učitelství

- Pročtete si pečlivě Návod pro učitele (viz Příloha B)!
- Okomentujte Návod pro učitele, který jste dostali na začátku této aktivity. Navrhněte úpravy zadání.
- Jsou pravidla uvedená v návodu jasná pro žáky základní školy?
- Když zařadíte tuto aktivitu do výuky ve škole, budete používat deník (tj. popis průběhu hodiny)?
- Kolik času by se mělo věnovat úvodu, hlavní části hodiny určené pro tuto aktivitu a kolik závěrečné diskusi?
- Měla by se tato didaktická aktivita prezentovat žákům jako hra, kde budou hrát určité role?
- Vezmeme-li v úvahu, že komunikace mezi žáky, a to jak aktivní tak pasivní, má při této aktivitě značnou váhu, jaký jazykový registr budete v hovoru se žáky používat?
- Je důležité, aby žáci vytvořili dvojice rovnoměrně podle svých schopností?
- Pokud jde o geometrický útvar, který se má nakreslit, je lepší zvolit takový, který žáci už znají, anebo nový útvar?
- Jaké jsou výhody a nevýhody obou předchozích možností?
- Je lépe použít čtverečkovaný nebo obyčejný papír?
- Povoluje se pouze jednoduchý pokyn. Pojem jednoduchý nebo nečleněný pokyn může být poněkud sporný: uveďte příklad a vysvětlete ho žákům. Proč a jak?
- Jaké předchozí vědomosti jsou pro tuto aktivitu zapotřebí?
- Napište si seznam pravděpodobného sledu pokynů pro nákres zvoleného geometrického útvaru.



- Uved'te příklady možných nejasných pokynů a tudíž odlišných nákresů a chybného porozumění.
- Je vaším cílem zavést definici daného geometrického útvaru?
- Jak byste mohli žákům pomoci na cestě od popisu geometrického útvaru přes (alespoň některé) jeho vlastnosti k definici? Navrhněte přípravu na hodinu.
- Co očekáváte od závěrečné diskuse? Jakou roli jí připisujete?
- Budete od žáků vyžadovat závěrečnou zprávu o aktivitě? Od jednotlivců nebo dvojic?
- Okomentujte Návod pro učitele, který jste dostali na začátku této aktivity. Navrhněte úpravy zadání.
- Splnili jste cíle, které jste si stanovili v této přípravě na hodinu?

### Úkoly pro žáky 2. stupně ZŠ a nižších gymnázií

- Přečtete si pečlivě Návod pro žáky!
- Ujistěte se, že jste se dohodli s učitelem i s kamarádem ve dvojici na smyslu výrazu jednoduchý, nečleněný pokyn.
- Nepovoluje se opravovat již zadaný pokyn nebo část nákresu. Dávejte si velký pozor, než začnete mluvit nebo kreslit či rýsovat!
- Kdy jste si uvědomili (týká se žáků, kteří zadávali pokyny), o jaký geometrický útvar jde, co je cílem nákresu? Pomohlo vám to? Přestali jste pak provádět jednotlivé pokyny, které vám dávali kamarádi (tj. přestali jste jim věnovat pozornost)?
- Nakolik vám pomohly předchozí vědomosti z geometrie?
- Nakolik bylo obtížné porozumět smyslu určitého pokynu? Uved'te alespoň jeden příklad.
- Dostali jste nějaký nejasný pokyn? Pokud ano, uved'te příklad.
- Nakreslili nebo narýsovali jste si (týká se žáků, kteří zadávali pokyny) daný geometrický útvar, dříve než jste začali dávat pokyny, anebo jste si útvar kreslili krok za krokem, a dělali tak to, co se požadovalo od kamaráda? Pokud tomu tak bylo, pomohlo to?
- Nakolik bylo obtížné nalézt vhodná slova, abyste mohli zadat pokyn? Uved'te alespoň jeden příklad.
- Máte z této zkušenosti dobrý pocit? Proč?
- Byli byste si radši s kamarádem vyměnili role?
- Bylo těžké uvědomit si, že některé vlastnosti daného geometrického útvaru závisejí na jiných? Uved'te příklad.
- Proč, podle vašeho názoru, navrhl učitel tuto aktivitu?
- Budete připravovat zprávu o této aktivitě?
- Okomentujte Návod pro žáky, který jste dostali na začátku této aktivity. Navrhněte úpravy zadání.

## PILOTÁŽ

### Seminář na pedagogické fakultě

Na začátku semináře dali vyučující studentům čistý list papíru a Návod pro žáky a vysvětlili aktivitu, která měla proběhnout. Studenti vytvořili dvojice a rozhodli se, který z nich bude zadávat pokyny, a kdo je bude přijímat a provádět nákres. Studenti, kteří měli pokyny zadávat, dostali papír se slovem *kosočtverec* nebo *krychle*.

Jakmile se studenti pustili do provádění aktivity, požadovali někteří z nich nové objasnění smyslu výrazu *jednoduchý, nečleněný pokyn*. Vyučující uvedli několik dalších, nematematických příkladů. Aktivita proto začala půl hodiny po zahájení semináře.

Po další půlhodině, když byli všichni studenti hotovi se zadáváním pokynů, nákresy, popisem a definováním, mohla začít diskuse.

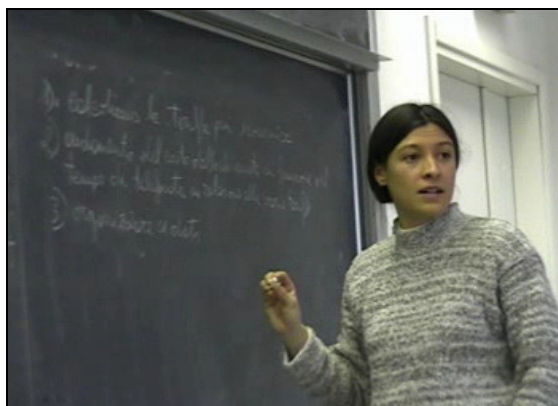


Studenti diskutují

Následující diskuse proběhla ve třech stadiích:

- všeobecné záležitosti, zejména ty, které se vztahují k pravidlům uvedeným v Návodu pro žáky;
- porovnání výsledků (seznamy pokynů, nákresy, popis a definice);
- poznámky a komentáře k předchozím, nejprve na téma kosočtverec, pak krychle.

Debaty a diskuse se protáhly na tři hodiny, až do konce didaktického semináře.



Studentka zahajuje debatu

Většina ze studentů konstatovala, že si uvědomili, jak je obtížné vyjadřovat se jasně a stručně byť jen o jednoduchých matematických pojmech a vlastnostech, tak jak to vyžaduje určitý pokyn. K vyjadřování používali většinou jen přirozený hovorový, nematematický jazyk. Nejtěžší bylo najít rovnováhu mezi tímto neoborným jazykem a jazykem matematiky a brát přitom na zřetel omezení týkající se používání matematické terminologie, uvedená v Návodu pro žáky.

Jak se dalo očekávat, většina nákresů byla správná, přestože mnoho studentů uvedlo, že ve chvíli, kdy si uvědomili, jaký útvar mají nakreslit, dokončili nákres (téměř) bez povšimnutí dalších pokynů, které jim zadával kolega ve dvojici. To by se dalo v této fázi pilotáže pokládat za slabinu, protože nebylo možné dodatečně porovnat určitý pokyn s příslušnou částí nákresu. Je proto nesmírně důležité zdůraznit žákům ve škole, aby se soustředili a dbali na to, aby každá dílčí část nákresu přesně odpovídala každému dílčímu pokynu, ať už je pokyn správný anebo špatný.

V průběhu diskuse zaznělo několik nejasných pokynů, což umožnilo vyučujícím připomenout studentům - budoucím učitelům - některé matematické pojmy, popř. pomoci jim je lépe pochopit. Na tomto místě je nutno připomenout, že většina studentů v tomto semináři absolvovala vysokoškolské studium různých přírodovědných předmětů, nikoli však obor matematika. V průběhu pregraduální přípravy se studenti účastnili jen dvou matematických kursů.

Potřeba lepšího osvojení některých základních matematických pojmů se podle očekávání znovu ozřejmila v průběhu diskuse o definicích *kosočtverce a krychle*. Často se stávalo, že vztah mezi popisem vlastností a definicí geometrického útvaru nebyl vůbec jasný. Bylo proto třeba věnovat věci více času a také se zaměřit na rozdíly mezi představou/nákresem geometrického útvaru a útvarem samotným.

### **Hodina matematiky ve škole**

Dva ze studentů didaktického semináře se nabídli, že provedou pilotáž aktivity s kosočtvercem ve 2. ročníku střední školy (tj. jako naše 7. třída ZŠ). Dva další nabídli pilotáž s použitím krychle ve 3. ročníku (tj. jako naše 8. třída ZŠ). Před pilotáží je vyučující VŠ znovu vyzvali, aby se vyjádřili k aktivitě a pravidlům pro žáky (ve věku 12-13 let). Snahou bylo docílení maximální efektivity experimentu s přihlédnutím k dílčím cílům stanoveným na fakultě i k případným modifikacím, které si mezi sebou dohodnou studenti učitelství. Před zahájením výuky byl mírně pozměněn Návod pro žáky.

Studenti učitelství se rozhodli pracovat se čtverečkovaným papírem a bez běžných pomůcek na geometrii, tj. bez pravítka a trojúhelníku.

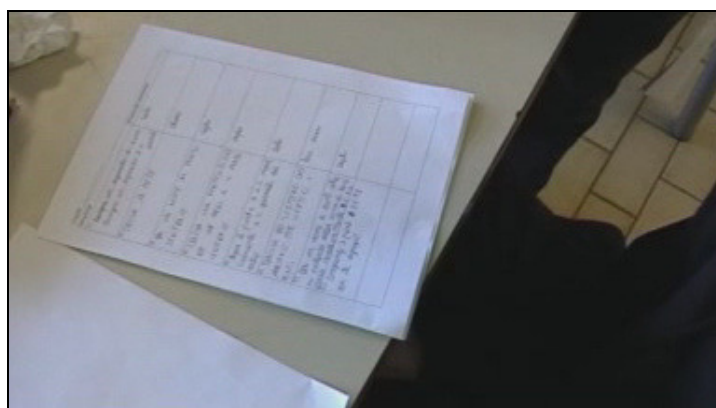




Dvojice při práci

*Nejvýznamnější výsledky, podobné těm, ke kterým došli studenti na pedagogické fakultě:*

- Bylo nezbytné lépe vysvětlit, co znamená jednoduchý, nečleněný pokyn.
- Někteří ze žáků, kteří zadávali pokyny, uvedli, že je těžké najít správná slova k vyjádření pokynu, a to i tehdy, mají-li jasnou představu o tom, co by měli jejich spolužáci nakreslit či narýsovat.



Seznam pokynů

- Po několika pokynech dokončila většina žáků úspěšně svůj nákres, i když (téměř) bez povšimnutí zbývajících pokynů: některé nákresy byly správné, i když pokyny k nim byly špatné (důležité bylo přece vyhrát!).
- Použití čtverečkováného papíru usnadnilo provádění nákresů.
- Několik pokynů bylo nejasných a tedy zavádějících.



Důsledky nejasných pokynů



*Nejvýznamnější výsledky, odlišné od těch, ke kterým došli studenti na pedagogické fakultě:*

- Od začátku hodiny si žáci stěžovali na obtížnost jazykového registru, který používali učitelé (studenti na praxi) jak v Návodu, tak při ústní komunikaci.
- Většina žáků použila k označení konce úseček písmen.
- Pro většinu žáků bylo popsat geometrický útvar a definovat ho jedno a totéž.
- Z této aktivity nejvíce výtěžili slabí žáci.
- Závěrečnou debatu zahájily prezentace jednotlivých dvojic, které popisovaly aktivitu ostatním ve třídě. Následovala diskuse.
- Doplnující činností byla záměna rolí uvnitř dvojic. Žáci si ji chtěli vyzkoušet s jiným geometrickým útvarem.

### **Zpětná vazba pro studenty – budoucí učitele**

Analýzy hodiny se kromě dvou vyučujících a všech studentů zúčastnili i dva školní žáci.

Čtyři studenti představili pilotáž se žáky 2. a 3. ročníku svým kolegům, ukázali a komentovali videozáznamy z jednotlivých hodin.



**Budoucí učitelé představují pilotáž svým kolegům**

Většina z výsledků pilotáže se stala podnětem k diskusi. Je však třeba poznamenat, že zatímco žáci byli velmi aktivní, studenti, kteří se pilotáže přímo nezúčastnili, se do diskuse zapojili jen sporadicky.



**Žáci diskutují se studenty učitelství**

### *Dodatečné závěry z diskuse:*

- Najít správný způsob, jak tuto aktivitu uvést a motivovat žáky ke splnění cílů.
- Určit správný didaktický kontrakt mezi učiteli a žáky pro dosažení optimálního výsledku.
- Učivo si v hodině správně časově rozvrhnout (pilotáž zabrala více času, než bylo původně naplánováno).
- Zvážit možnost předem žáky seznámit s geometrickým softwarem, mohlo by to pomoci zejména těm žákům, kteří mají zadávat pokyny.
- Všimnout si rozdílů mezi matematickým jazykem, který je ustálený, a „flexibilitou“ běžného hovorového jazyka.
- Rozhodnout se, jak se dá žákům tohoto věku ukázat přechod od popisu geometrického útvaru k jeho definici.

## **Druhá pilotáž**

Lucia Doretta\*

### **REALIZACE NÁVRHU**

Cílem aktivity bylo přivést studenty – budoucí učitele k uvažování o dvou odlišných jazycích, grafickém a verbálním, které se prolínají v průběhu geometrického diskursu a pomocí koordinované interakce určují rozvoj vědomostí. Aktivita se projevila jako zajímavá příležitost jak zdůraznit potřebu vyučovat využívání různých způsobů vyjadřování a jejich koordinaci v geometrii prostřednictvím vhodných úkolů, které umožňují využívat tyto registry střídavě.

#### **Aktivita se studenty učitelství**

*Počet studentů:* 18

*Doba trvání celkem:* čtyři hodiny (jedna hodina na práci ve dvojicích – tři hodiny na diskusi)

Studenti utvořili dvojice a v každé z nich si rozdělili role „příjemce“ a „poskytovatele“ pokynů. Každý student pak dostal instrukce jak postupovat, sled pokynů a další materiály. Před zahájením aktivity bylo třeba pomocí příkladů vyjasnit v textu význam výrazu „jednoduchý, nečleněný pokyn“, který měl účastníkům aktivity umožnit nákres tělesa pomocí krátkých, za sebou následujících kroků. Na papírech pro studenty, kteří měli zadávat pokyny, byla uvedena slova *kosočtverec*, *rovnoramenný lichoběžník*, *nebo krychle*. Na konci první fáze, hodinu a půl po zahájení práce:

---

\* Dipartimento di Scienze Matematiche e Informatiche, Università di Siena, Itálie.

- každý člen dvojice dokončil vyplňování pracovního listu buď s danými nebo přijatými pokyny, s písemným záznamem o poznámkách v průběhu aktivity a s definicí daného útvaru
- všechny dvojice ukázaly papír s názvem útvaru a hotovým nákresem.

Následující fáze byla kolektivní diskusí nad prací každé z dvojic. První připomínky zúčastněných studentů se týkaly neočekávaných obtíží, se kterými se při práci setkali navzdory tomu, že s danými geometrickými útvary byli dobře obeznámeni. Všichni se shodli na tom, že role *poskytovatele pokynů* je obtížnější než role *příjemce a vykonavatele pokynů*: ti, kteří pokyny zadávali, museli mít stále na zřeteli, jak daný útvar vypadá a jak se jmenuje, aby mohli tuto představu interpretovat jako vjem i kognitivně a dokázali formulovat vhodné a přiměřené údaje pro její reprodukci. Někteří prohlásili, že se jim nepodařilo projít celým seznamem pokynů (a to dokonce po mnoha pokusech), jiní přiznali, že měli potíže s formulací pokynů a nebyli se jistí, zda jim jejich kolegové rozumí. Pak se studenti zabývali několika seznamy pokynů, které připravili vyučující (práce se zpětným projektorem). Seznamy analyzovali a komentovali různé způsoby interpretace pokynů a jejich grafického znázornění u jednotlivých příjemců.

Příloha C uvádí záznam některých komentářů na pracovních listech.

Diskuse v didaktickém semináři byla příležitostí pro reflexi studentů na dva následující aspekty:

- jazyk matematiky a jeho role v procesu utváření vědomostí;
- role definice v geometrii.

#### A. Jazyk matematiky a jeho role v procesu utváření vědomostí

Vhodné užívání jazyka předpokládá plné uvědomění zavedené matematické terminologie a také povědomí o nutnosti přesných instrukcí, které všichni chápou stejně. V určitých momentech pilotáže byly pokyny zadávány způsobem, který umožnil provést náčrt útvarů s jinými geometrickými vlastnostmi, než jsme chtěli dosáhnout (například následující instrukce: *1. narýsuj úsečku; 2. narýsuj další úsečku, která je na ni uprostřed kolmá*, nevedou k jednoznačné identifikaci kosočtverce, jak bylo původně zamýšleno).

Měli jsme pocit, že téma související s jazykem může nabídnout zajímavý materiál pro práci v hodinách matematiky, i když ne všichni studenti se s tímto názorem ztotožňovali.

Některé studenty překvapila kritická analýza, kterou jsme u daných instrukcí prováděli, a vyslovili se takto „*přestože pokyny nejsou moc přesné, příjemce má za úkol je interpretovat a provést správně*“. Všimli jsme si, že některé nákresy neodpovídají těm, které jsme očekávali, z pokynů nebylo ale možné odhalit příčinu.

Studenti měli tendenci doplnit u chybných nebo nepostačujících pokynů chybějící informace v souladu s předchozími údaji, využívali k tomu fenomen vnímání a zákonitosti; v jiných případech prvotní vizualizace útvaru, vytvořené původně

získanou informací, vedly příjemce k tomu, že pokračoval ve správném nákresu, přestože instrukce nebyly správné<sup>1</sup>.

Diskuse rovněž poukázala na rozdíl mezi přirozeným hovorovým jazykem, který se vyznačuje bohatostí a různorodostí vyjadřovacích prostředků, a jazykem matematiky, v němž má každý termín svůj specifický význam a ten určuje jeho použití.

Nakonec se ukázalo, že v mnoha případech byl pro vysvětlení zaveden „cizí prvek“: máme na mysli skutečnost, že byla použita informace popisující útvar jakožto umístěný standardním způsobem v přirozeném referenčním rámci, který tvořily okraje stránky. To dokazuje existenci stereotypů u představ o pojmech a geometrických vztazích (pokyny vlastně často obsahovaly výrazy jako „horizontální“ a „vertikální“: „*narýsuj horizontální úsečku*“, „*narýsuj vertikální úsečku, která protíná střed*“).

Tato zkušenost přivedla studenty k úvahám o nutnosti rozvíjet specifické činnosti se vztahem k jazyku matematiky, k jeho osvojování a používání ve výuce: i když správné užívání jazyka vyžaduje dlouhý čas nácvičku, je přesto základním nástrojem pro utváření vědomostí.

### B. Role definic

Další námět pro úvahy přinesl úkol na jednom pracovním listu, a to podat definici narýsovaného nebo popsaného útvaru. Tento úkol si různí studenti vyložili různě: někteří pouze označili název útvaru, zatímco jiní uvedli řadu vlastností, často víc, než bylo k jeho charakteristice třeba.

Zde je například několik definic kosočtverce, které poskytli studenti ve snaze poukázat na tento aspekt a které analyzovali v průběhu didaktického semináře:

Kosočtverec: „*Rovinný geometrický útvar, který se dá chápat jako zvláštní případ rovnoběžníku s protilehlými stranami párově rovnoběžnými, vnitřními úhly párově shodnými a s kolmými úhlopříčkami o nestejně délce*“.

Kosočtverec: „*Čtyřúhelník, který má shodné všechny strany a všechny protilehlé úhly*“.

Kosočtverec: „*Rovnoběžník s kolmými úhlopříčkami, které nejsou shodné*“.

Kosočtverec: „*Čtyřúhelník se čtyřmi shodnými stranami, které jsou párově rovnoběžné*“.

Uvažovali jsme o smyslu definice v matematice a o rozdílu mezi vlastnostmi, které útvar *popisují* a vlastnostmi, které ho *definují*. Diskutovali jsme zejména o tom, jak „minimalizovat“ uvedené vlastnosti kosočtverce, abychom dokázali určit takové, které jsou vždy nezbytně nutné a pro charakteristiku postačující. Všimli jsme si, že určení nezbytně nutných a postačujících vlastností je jak základním momentem při tvorbě definice, tak náročným a složitým mezníkem pro žáky při vyučování. Je tedy nutné hledat operativní postupy v práci se žáky při tvorbě definic. Při těchto

<sup>1</sup> V jedné poznámce jsme četli „Přestože instrukce nebyly vždy úplně přesné, řídil jsem se instrukcemi co nejlogičtějším způsobem (možná tím nejtriviálnějším!). Asi proto, že v geometrických pojmech mám celkem jasno“.



postupech mohou napomoci speciálně vyvinuté materiály<sup>2</sup> a/nebo software Cabri (konstrukční modus Cabri ukazuje, které nezbytně nutné a postačující vlastnosti byly vzaty v úvahu a o kterou definici jde).

Zdůraznili jsme studentům, že otázka definice je úzce svázána s otázkou třídění: tj. vlastnosti vyjádřené definicí nám musí umožnit zařazení předmětu pouze do takové třídy, která má stejné vlastnosti. Všimli jsme si také, že definice zapsané studenty často vedly k tzv. klasifikace vyčleňováním (požadavek, že *kosočtverec má být rovnoběžník s kolmými úhlopříčkami, které nejsou shodné* implikuje vyčlenění čtverců z množiny kosočtverců). To byla příležitost k upozornění, že Euklid ve své knize „Elementy“ rovněž definuje vyčleňováním: například definice čtyřúhelníku, které uvádí, mají za cíl stanovit i odlišení či vyčlenění uvnitř množiny těchto útvarů. Definice, kterým dáváme přednost v dnešní době, dávají průchod vzniku inkluzivních vztahů, umožňujících srovnávání geometrických útvarů pomocí popisu shodných a rozdílných rysů. Pokud je však třeba rozlišovat mezi pojmy (např. konkávní nebo konvexní čtyřúhelníky), musíme odkazovat na definice vyčleňováním (partition). Diskutovali jsme o tom, že klasifikace pomocí včleňování (inclusion) i s ohledem na skutečnost, že je mnohem více komplexní, umožňuje deduktivní systematizaci pojmů (dílní pojmy jsou podmnožinou pojmů obecnějších), je také mnohem více ekonomická než klasifikace vyčleňováním a umožňuje přiřadovat každému geometrickému útvaru více alternativních definic (*čtverec je kosočtverec se shodnými úhlopříčkami nebo čtyřúhelník, jehož všechny strany jsou stejně dlouhé*).

Při výuce je zásadní věcí neuvádět a neočekávat definici dřív, než je vytvořeno prostředí, v němž definice dává smysl.

## Realizace aktivity v hodinách matematiky na ZŠ

*Počet studentů na pedagogické praxi: 2*

*Celková doba trvání aktivity v každé třídě: dvě hodiny (jedna hodina na výklad a provedení aktivity, jedna hodina určená pro diskusi)*

Aktivitu se rozhodli vyzkoušet dva studenti při pedagogické praxi: jeden z nich učil v 6. třídě (18 žáků ve věku 11-12 let) a v 8. třídě (18 žáků ve věku 13-14 let), a druhý ve dvou 7. třídách (20 žáků a 17 žáků ve věku 12 -13let). V každé hodině byl přítomen třídní učitel.

Oba praktikanti prezentovali aktivitu žákům jako hru pro dvojice, která se jmenuje „Objevujeme geometrické útvary“. Jeden soutěžící „napovídal“ druhému podle seznamu, druhý soutěžící měl za úkol „uhodnout“ útvar. Práce ve třídě byla strukturována stejným způsobem jako v didaktickém semináři. I zde bylo třeba věnovat více času, než se předpokládalo, vysvětlování, jak se mají zadávat pokyny (i tak se ale v písemném projevu našly nevhodné formulace). Zvolenými útvary byl *kosočtverec, lichoběžník, rovnoramenný trojúhelník a krychle*.

<sup>2</sup> Např. „dynamické modely“: při manipulaci s nimi, analýze a jejich popisu můžeme shromáždit prvky („elementy“) pro tvorbu definic útvarů, které odkazují na různé vlastnosti.

Ve více než jedné třídě požadovali žáci vyzkoušet si aktivitu s výměnou rolí. V jedné třídě navrhl učitel změnu aktivity, aby zabránil žákům v rámci dvojice pomáhat jeden druhému, pomocí pravidla o výměně zakázaných informací. Došlo i na další úpravy: oba žáci ve dvojici dostali papír s názvem útvaru, který měl být uchován v tajnosti (názvy útvarů se ale na každém archu lišily); každý žák musel zapsat seznam pokynů, aby jejich partner mohl sestrojít útvar; poté se archy s instrukcemi vyměnily a každý žák si mohl přečíst a písemně okomentovat obdržené instrukce, pokud nebyly dost jasné, a nakonec útvar narýsovat. V závěru měli žáci vrátit archy s instrukcemi, komentářem a nákresem svým partnerům.

Na samém konci aktivity si každá dvojice pohovořila o své práci se spolužáky a s učitelem.

### **Zpětná vazba – kolektivní diskuse**

*Počet studentů:* 18

*Celková doba trvání:* dvě hodiny

Studenti, kteří vedli hodiny při pedagogické praxi, referovali ostatním o svých zkušenostech.

Jedna z prvních věcí, které v debatě zazněly, byl údiv žáků, když jim učitel aktivitu navrhl: bylo to něco neobvyklého, měli pocit, že nejsou na něco takového připraveni, báli se, že je učitel bude negativně hodnotit. Uklidnili se, až když je učitel ujistil, že jde o hru, která jim má pomoci při studiu geometrie. Pak teprve byli schopni se volně vyjadřovat.

Několik dvojic, zejména v 7. třídě, ovlivnila skutečnost, že „museli“ správný náčrt útvaru odevzdat, a tak to nějak „sfoukli“, i když to vůbec neodpovídalo pokynům napsaným na papíru, který dostali (jasná známka ilegální výměny informací). Učitel proto před zahájením hry v druhé 7. třídě navrhl úpravu pravidel. Požádal žáky, aby hráli tutéž roli současně, ale se dvěma různými útvary. Výsledky dávaly podle očekávání větší smysl a prokázaly v zásadě dobrý, odpovídající vztah mezi souborem pokynů a narýsovaným útvarem.

Všimli jsme si také, že žáci, (podobně jako předtím studenti při didaktickém semináři na fakultě), hodnotili úkol zadávání instrukcí jako těžší a připustili pochybnosti o tom, zda se vyjadřovali správně. Ti, kteří pokyny přijímali, připouštěli, že měli často problémy a někdy provedli náčrt až teprve tehdy, když si pokyn vyložili sami pro sebe („*Kdybych sama nevěděla, o co jde, nikdy bych ten náčrt nedotáhla do konce: některé údaje byly dost šílené*“).

Studenti si pak prohlédli některé žákovské práce: projevila se různá úroveň porozumění jazyku geometrie a jeho používání, v některých případech dokonce značné disproporce mezi tím, co žáci chtěli popsat a co skutečně popsali. Vymezili jsme také další aspekt, problém „jaký smysl dává věta: uveďte definici pro narýsovaný útvar“. Pro mnoho žáků to bylo rozpoznat útvar a zapsat jeho název, pro jiné to znamenalo napsat seznam jeho vlastností.

## Poznámky

Navrhovaná aktivita přivedla studenty – budoucí učitele k uvažování o mnoha aspektech výuky.

- Obtížnost správně používat jazyk matematiky: nejistota, pochybnosti a chyby, které nastaly při předávání instrukcí znamenají nutnost věnovat ve výuce matematiky zvýšenou pozornost ústnímu projevu učitele a žáků, nejen aby byli schopni jasně a správně vyjádřit své myšlenky, ale i proto, aby to, co řeknou, dávalo smysl pro ostatní.
- Potřeba vhodným způsobem užívat jazyk jako dorozumívací nástroj – i když vyžaduje dlouhý čas nácviku – je to základ pro utváření vědomostí.
- Potřeba zařazovat podobné aktivity do výuky, protože dávají učitelům potřebné informace o vědomostech žáků, o úrovni konceptualizace, které již dosáhli, případných mezerách a špatně pochopené látce. Tyto informace učitel nezbytně potřebuje k tomu, aby mohl ve třídě vhodně intervenovat prostřednictvím správně naplánovaných výukových činností.
- Obecnější potřeba rozvíjet geometrický diskurs pomocí koordinované interakce mezi různými registry (verbálním, grafickým a symbolickým) a uznání důležitosti role, kterou hrají při výuce percepce a vizualizace.

Jeden student, budoucí učitel, si zapsal:

*Osobně mám za to, že aktivita, kterou jsme se dnes zabývali, byla velice zajímavá. Není to lehké ani pro lidi, kteří mají dost hluboké znalosti oboru, převádět mluvený jazyk na jazyk grafický a obráceně. Proto si myslím, že tatáž aktivita provedená na druhém stupni základní školy může vyvolat zájem a zvědavost jak u vyučujících tak u žáků.*

## Třetí pilotáž (IUFM Paříž) a Závěr

Franco Favilli

### TŘETÍ PILOTÁŽ

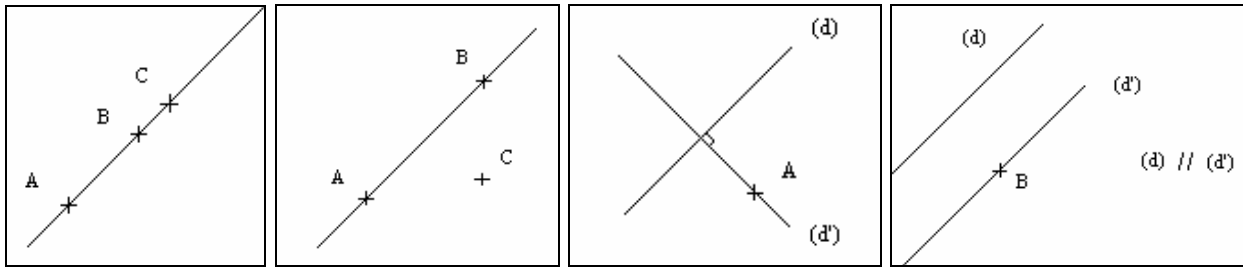
Návrh byl také pilotován v poněkud pozměněné podobě na pedagogické fakultě IUFM v Creteil, Francie. Experiment provedla studentka Catherine Taveau pod vedením třídní učitelky (Cynthia Dobin). Ve třídě bylo přítomno 28 žáků ve věku 11 až 12 let, v prvním ročníku víceletého gymnázia.

Hlavní dva cíle, které si učitelka stanovila, byly totožné s předchozími dvěma školními experimenty – posílit u žáků znalost jazyka používaného v hodinách geometrie a umožnit přechod od vnější podoby určitého útvaru k jeho vlastnostem (tj. od toho, co žáci vidí, k tomu, co mohou pochopit) – návrh byl realizován ve dvou vyučovacích hodinách.



### První hodina

„Příjemci“ měli útvar pouze nakreslit od ruky, bez použití pomůcek běžných pro hodiny geometrie.

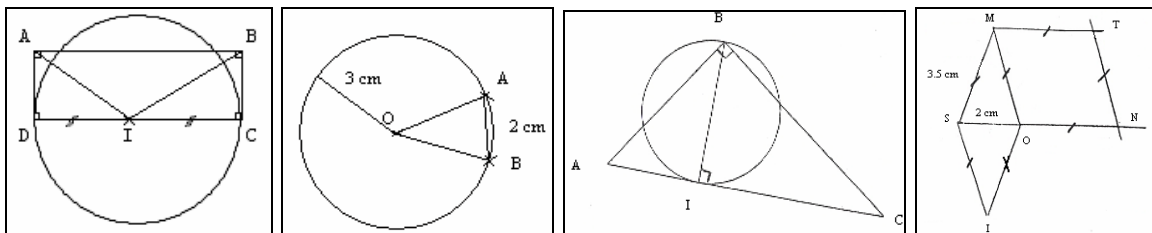


Kreslení přímek

*Poznámky* – Mnoho žáků se pokusilo zapsat instrukce pro kreslení přesně téhož útvaru (uvedli například i míry), a v několika případech nebyly tyto instrukce dostatečně přesné, to však nezabránilo příjemcům nakreslit útvar správně.

### Druhá hodina

Tato hodina se konala o měsíc později. Učitelka dala žákům geometrický miniglosář a požádala příjemce, aby narýsovali (s patřičnými pomůckami) dané útvary co nejpřesněji.



Rýsování „kružnic“

*Poznámky* – Instrukce pro první tři útvary byly většinou správné, až na tu poslední. Učitelka se rozhodla rozšířit výuku o aktivitu s počítači s využitím Cabri geometrie.

Učitelka se o tuto tematiku velice zajímá a byla si vědoma, že žáci tohoto věku mohou mít problémy s užitím přesného jazyka geometrie. Ale brzy jí bylo jasné, že podobné úkoly (včetně využití Cabri) jsou dobrým prostředkem k tomu, aby žáci pochopili rozdíl mezi popisem útvaru a jeho definicí.

Aby si žáci lépe uvědomili rozdíl mezi popisem útvaru a jeho definicí a aby sami našli cestu k pojmu definice určitého útvaru, se praktikující studenti při první pilotáži na universitě v italské Pise před nástupem do školy rozhodli:

- Nejprve požádat žáky, aby si připravili seznam vlastností, které mohli na daném útvaru „vidět“;
- dále je nechat uvažovat o každé z těchto vlastností a porovnat ji s ostatními;
- nakonec vymazat ze seznamu takové vlastnosti, o kterých si mysleli, že pouze vyplývají z ostatních.

Tímto způsobem dospěli žáci k přesvědčení, že vlastnosti, které „přežily“, představují lepší, dokonalejší a kratší popis útvaru: něco ekvivalentního nebo velmi blízkého

tomu, co učitelka označila za „definici“. Diskuse s celou třídou o seznámech, které sepsaly různé skupiny žáků, a především vysvětlení, která vedla k vymazávání, velice přispěla k tomu, že žáci přijali výklad jednoho z nejsložitějších a nejobtížnějších témat v matematice, pojem definice, jako téma atraktivní a nakonec ho dobře zvládli.

Je důležité připomenout, že všechny tři experimenty dokázaly, že pro studenty na vysoké škole a pro žáky na škole základní či střední je rozhodně namíště ovládat nejen jazyk geometrie, ale i dobře organizovat a umět se vyjadřovat o algoritmech, tj. postupech (sled pokynů)<sup>3</sup>. Mohli tak snáze získat kýžený výsledek (nákres), který provedl další student, který měl za úkol jen dané pokyny provádět. Jak bylo ale již uvedeno, nesnadnost (či nemožnost) chovat se jako pouhý vykonavatel spolu s faktem, že předchozí vědomosti často vedly ke správnému nákresu bez ohledu na obdržené informace, ukázaly na důležitost plného respektování přijímaných instrukcí podle toho, jak byly zadány a pochopeny. Pro studenty, ale především pro školní žáky, je touha uhodnout nebo dokonce „vyhrát“ často tak silná, že odolá i nejednomu pravidlu.

Z nerovnováhy, kterou bylo možné pozorovat u zadání pro jednotlivé členy dvojice (poskytovatel a vykonavatel pokynů), vyplývá, že je vhodné zopakovat aktivitu s použitím jiného útvaru a s výměnou rolí, tak jak to realizovaly první dva experimenty.

## DOPORUČENÁ LITERATURA

Ellerton, N.F. and Clarkson, P.C. (1996). Language Factors in Mathematics Teaching and Learning, in Bishop A.J. et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 987-1033). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Favilli, F., Japelt, A. and Novotná, J. (2005). Developing good practices for teacher training focused on understanding classroom environment, in Novotná J. (ed.), *Proceedings of SEMT '05 – International Symposium Elementary Maths Teaching* (pp. 335-336). Charles University, Prague.

Favilli, F. and Villani, V. (1993). Disegno e definizione del cubo: un'esperienza didattica in Somalia. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 16, n.10, 907-925.

Maier, H. (1995). Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi. *La matematica e la sua didattica*, 3, 298-235.

UMI-CIIM (2001). *Matematica 2001, Materiali per il XXVII Convegno Nazionale sull'Insegnamento della matematica*. Lucca: Liceo Scientifico “A. Vallisneri”.

---

<sup>3</sup> Tato schopnost se nedá brát jako samozřejmost ani mezi učiteli na vysoké škole, ať již matematiky nebo didaktiky matematiky, což jasně dokázala dílna k tomuto návrhu, která se konala jako součást vědeckých aktivit na kongresu SEMT '05 v Praze.

## Příloha A1: Geometrické hádanky – Návod pro žáky

### Materiály pro tuto aktivitu:

Stačí list papíru, pero a formulář k vyplnění.

Žáci pracují ve dvojicích. Každý žák ve dvojici má jinou roli: jeden žák (*instruktor*) dává pokyny a druhý žák (*kreslič*) pořizuje náčrty podle pokynů, které dostane.

### INSTRUKTOR

Dostanete papír s názvem geometrického rovinného nebo prostorového útvaru. Nesmíte ho nikomu ukázat ani o něm mluvit.

**Máte za úkol umožnit spolužákovi nakreslit daný útvar krok za krokem pomocí několika pokynů.**

1. Chcete-li, můžete si útvar nakreslit předem nebo v průběhu hry;
2. Smíte užívat jen jednoduché pokyny, to znamená, že každý pokyn vyžaduje od vašeho spolužáka nakreslit jen jednu jedinou část geometrického útvaru. Ukažme si to na nematematickém příkladu: jestliže máte na papíře napsáno prostřený stůl, první jednoduchý (tudíž povolený) pokyn je:  
*Prostři ubrus – polož nůž – polož vidličku - ...*  
Pozor, žádný z následujících pokynů se nepovoluje:  
*Prostři stůl k obědu – používáme to denně při jídle.*
3. Při zadávání pokynu můžete použít matematické výrazy, např. *úsečka, osa, úhel atd.*, ale nemůžete použít názvy mnohoúhelníků (trojúhelník, čtverec atd.), geometrické vzorce a názvy předmětů připomínajících geometrický útvar, který se má nakreslit (např. pokud je útvar kružnice, nesmíte říct nakresli kolo).
4. Zapište každou instrukci do formuláře, který jste dostali. Připojte poznámky, je-li třeba.
5. Pokud vás kreslič požádá, abyste pokyn zopakovali, můžete to udělat jedinečně pomocí stejné formulace.
6. Další pokyn můžete dát teprve tehdy, když kreslič provedl předchozí pokyn.
7. Po provedení posledního pokynu napište popis a definici zadaného útvaru.

### KRESLIČ

Váš spolužák dostane papír s názvem geometrického rovinného nebo prostorového útvaru. Požádá vás, abyste nakreslili tento útvar na základě několika pokynů.

**Vášim úkolem je nakreslit daný útvar krok za krokem.**

1. Zapište si každý pokyn, který vám dá instruktor, do formuláře, který jste dostali, a je-li třeba, připojte poznámky.
2. Pokud je pokyn nejasný, můžete instruktora požádat o zopakování, ale ne o výklad.
3. Pokud je pokyn stále nejasný, můžete si ho zapsat s poznámkami do formuláře.
4. V nákresu nesmíte provádět žádné opravy.
5. Pokud zjistíte, že jste se spletli, zapište si to do formuláře.
6. Po provedení posledního pokynu si zapište název, popis a definici zadaného útvaru.
7. Konečný nákres můžete ukázat instruktorovi a celé třídě teprve tehdy, až skončí všechny dvojice.


**Příloha A2: Geometrické hádanky – Formulář pro zapsání pokynů**

Dvojice \_\_\_\_\_

Pokyny	Poznámky
1)	
2)	
.....	

Název útvaru: \_\_\_\_\_

Popis útvaru: \_\_\_\_\_

Definice útvaru: \_\_\_\_\_

## Příloha A2: Geometrické hádanky – Návod pro učitele

Cílem návodu je pomoci učitelům přizpůsobit aktivitu schopnostem třídy, ve které se bude realizovat. Protože aktivita je určena žákům 2. stupně ZŠ, musíme mít na zřeteli, že v tomto věku (11-14 let) se vědomí žáků abstrakci teprve otevírá. Pro tento věk je typický posun od konkrétních k abstraktním formulacím.

### Cíle

Aktivita se zaměřuje na jedné straně na posílení schopnosti žáků užívat jazyk geometrie a na druhé straně na schopnost učitele budovat geometrické pojmy v žákově mysli a nebýt přitom příliš omezován definicemi.

### Potřebné předchozí znalosti

Aktivita vyžaduje od žáků znalost základních geometrických pojmů, jako jsou úsečka, úhel, kolmé a rovnoběžné úsečky.

### Další doporučené výukové materiály

Užitečným nástrojem pro tuto aktivitu je „geo-plane“, protože umožní lepší představu útvaru. Další výhodou je, že neomezuje kreativitu žáků.

### Popis a poznámky

1. Aktivita se zadá žákům jako hra; omezí se tak strach z možného hodnocení, žákům se tak umožní projít aktivitou bez stresu. Aktivita se zadá jako *hra pro dvojici*. Účastníci mají dvě různé role:

- Žák, který dává pokyny (*instruktor*);
- Žák, který pokyny přijímá (*kreslič*).

Instruktor dostane papír s názvem geometrického útvaru a jeho úkolem je umožnit spolužákovi daný útvar nakreslit.

2. Řeč učitele by měla odpovídat věku žáků. Proto by se měl učitel vyhnout používání tvarů imperativu, který je autoritativní a připomíná jazyk, který často používají učebnice matematiky (např. *zjednodušte následující výraz, vyřešte následující úlohu*). Učitel by měl spíše používat první osobu množného čísla. Je také možné zjemnit tvary imperativu použitím tázacích výrazů a slovesa *moci*.

3. Při této aktivitě nemusí být dvojice nutně na stejné úrovni, protože cílem je *komunikace* mezi žáky, a to jak aktivní, tak pasivní. Učitel může vytvořit i nesourodé dvojice. V první etapě aktivity při práci ve dvojicích je důležité usnadnit socializaci.

4. *Geometrické obrazce*, které se mají nakreslit, můžete vybírat mezi těmi, které už žáci znají, a těmi, které jsou pro ně nové. Na jedné straně by mohla žákova předchozí znalost geometrického obrazce posílit jeho znalosti vlastností obrazce a usnadnit komunikaci ve dvojicích; na druhé straně by mohla aktivovat žákova myšlenková schémata vytvořená dříve. Například ten z žáků, který má roli kresliče, by mohl v určitém okamžiku pokračovat v kreslení pouze z toho důvodu, že si uvědomí, o jaký obrazec jde, a ne pomocí pokynů, které dostává od svého spolužáka. Něco podobného by se mohlo stát žákovi, který má roli instruktora, protože nemusí rozpoznat různé možné interpretace svých pokynů; například z pokynu *nakresli dvě rovnoběžné strany* není jasné:

- a) zda jsou strany shodné nebo ne;
- b) jaké je vzdálenost mezi stranami;
- c) zda mají strany některý krajní bod na společné kolmici nebo ne.



Lze očekávat, že žák, který dostane tento pokyn, nakreslí dvě rovnoběžné strany čtverce.

Použijeme-li obrazec, který žáci neznají, budou dávat větší pozor na formu zadávaných pokynů a na to, jak je budou provádět, protože nemají žádná myšlenková schémata, která by s útvarem souvisela. Aktivita však v tomto případě může být pro žáky obtížnější.

5. Použití čtverečkovaného papíru může usnadnit úkol oběma žákům ve dvojici (instruktorovi i kresličovi). Může se to však stát i limitujícím faktorem, protože žáci mohou ve čtvercové síti dávat přednost určitým cestám (např. pokyn nakresli šikmou úsečkou by mohl vést k tomu, že kreslič nakreslí úsečkou svírající se sítí úhel  $45^\circ$ , protože použije čtverce v síti).

Pokud se učitel rozhodne použít nelinkovaný papír, bylo by užitečné nechat žáky používat pravítko i trojúhelník.

Také žák v roli instruktora by měl dostat list papíru, kam by si mohl sám také kreslit obrazec, je to pro něj důležitá vizuální opora. Je známo, že žáci v tomto věku (11 až 14 let) mají malou schopnost abstrakce a to, že si nakreslí obrázek podle svých vlastních pokynů by jim mohlo usnadnit monitorování postupu spolužáka.

6. Protože je aktivita založena na komunikaci mezi žáky v každé dvojici, měl by učitel zaměřit pozornost žáků na to, že jsou povoleny pouze jednoduché pokyny. Pojem jednoduchého neboli nestrukturovaného pokynu by mohl být dost diskutabilní: učitel musí vybrat způsob, jak ho vysvětlí žákům. Například pro nakreslení úhlopříček kosočtverce mohou být zadány dva soubory pokynů:

- nakreslí úsečkou AB – označ M její střed – nakreslí úsečkou MC kolmou k AB – nakreslí úsečkou MD shodnou a přilehlou k MC (posloupnost čtyř jednotkových pokynů).
- nakreslí dvě navzájem kolmé úsečky, které se protínají ve středech (pouze jeden pokyn, který ale není jednotkový).

Ve formuláři, který žáci dostanou, je užitečné uvést příklad nestrukturovaného pokynu ne z matematiky, ale z každodenního života; žáci se pak budou cítit volněji v průběhu aktivity.

7. Na konci aktivity požádejte žáky, aby:

- napsali jméno obrazce, který nakreslili;
- obrazec *popsali*;
- definovali* ho.

Tato poslední etapa aktivity je pro žáky užitečná pro budování pojmu geometrického obrazce, který jim byl zadán. Podle situace ve třídě může učitel rozhodnout, zda bude požadovat přesnou definici geometrického obrazce nebo ne.

8. *Závěrečná debata* ve třídě je důležitou etapou aktivity, protože umožňuje učiteli i celé třídě prohlížet si konečné nákresy, porovnávat soubor pokynů a nákresy každé dvojice, poslouchat a diskutovat různé nápady o zadaném obrazci. Z tohoto pohledu je možné zvolit tyto strategie:

- Nejprve by měla dvojice prezentovat a popsat svůj postup ostatním spolužákům; ti k němu mohou pokládat otázky a komentovat ho, což vytváří podmínky pro opravdovou diskusi mezi dvojicemi;
- Potom je možné navrhnout změnu ve složení dvojic, např. instruktor z jedné dvojice může pracovat s kresličem z jiné dvojice. Tak by se žákům dala možnost porozumět tomu, jak je důležité používat jednoznačný matematický jazyk a terminologii.

9. *Obměny* aktivity

- Dát všem žákům ve třídě stejný soubor pokynů pro kreslení geometrického útvaru. Některé z pokynů mohou být zadány nejasně, což umožní sledovat reakce žáků na různé interpretace.



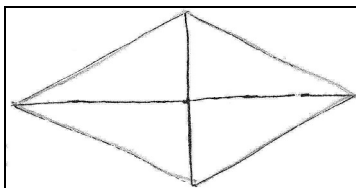
- Chtít od žáků, aby nakreslili nestandardní geometrický obrazec.
- Rozdělit žáky do skupin. Každá skupina si vybere některý geometrický obrazec a soubor jednotkových pokynů pro jeho nakreslení. Každá skupina pak požádá učitele, aby byl jejich kresličem a nakreslil vybraný obrazec.
- Rozdělit žáky do skupin. Každá skupina předá soubor nestrukturovaných pokynů pro nakreslení geometrického obrazce jiné skupině a obráceně, jako v soutěži.



## Příloha C: Geometrické hádanky – Dva pracovní listy studentů učitelství

### Příklad 1: Konstrukce kosočtverce

Seznam pokynů	Komentář „příjemce“
1. Narýsuj vodorovnou úsečku.	
2. Vyznač střed této úsečky.	
3. Narýsuj vertikální úsečku, která prochází tímto středem.	
4. Počáteční body úsečky musí být ve stejné vzdálenosti od koncových bodů úsečky.	„Není jasné, o jakou úsečku jde.“
5. Tyto dvě úsečky nesmí mít stejnou délku.	
6. Spojte koncové body obou úseček.	



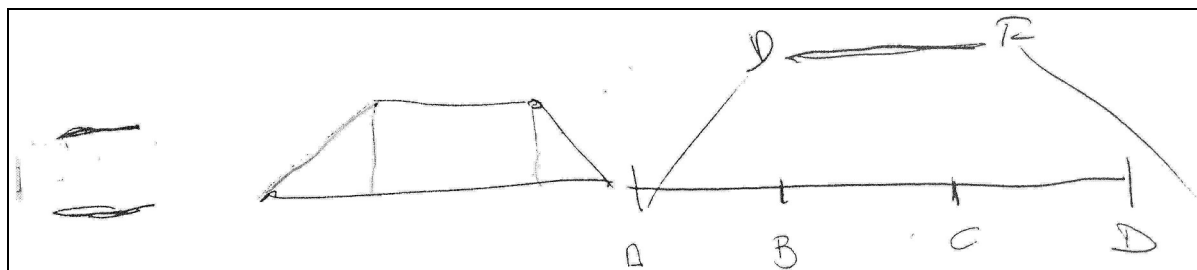
**Nákres kosočtverce vytvořený pomocí těchto instrukcí**

*Definice útvaru* (podle „příjemce“ pokynů) – „Kosočtverec: rovnoběžník s kolmými úhlopříčkami, které nejsou shodné.“

*Definice útvaru* (podle „poskytovatele“ pokynů) – „Kosočtverec: rovinný geometrický útvar, který se dá chápat jako zvláštní případ rovnoběžníku s protilehlými stranami párově rovnoběžnými, vnitřními úhly po dvou shodnými a s kolmými úhlopříčkami o nestejně délce.“

### Příklad 2: Konstrukce rovnoramenného lichoběžníku

Seznam pokynů	Komentář žáků, kteří zadávají pokyny	Komentář těch, kdo pokyny přijímají
1. Narýsuj vodorovnou úsečku.		
2. Rozděľ vodorovnou úsečku na tři stejné části.		
3. Označ čtyři body, které tím na úsečce vznikly, po řadě písmeny A, B, C, D		„Neřekli, že máme začít zleva“.
4. Narýsuj úsečku rovnoběžnou s BC.	„Copak jsem to neřekl jasně? Přeskočil jsem tohle: Narýsuj kolmici k AB v bodě B a kolmici k CD v bodě C.“	„Můžu ji narýsovat, kde chci, ale udělám ji nad úsečkou BC a stejně dlouhou.“
5. Vyznač úsečku EF.		
6. Spoj body A a E.		
7. Spoj body D a F.		



**Nákres lichoběžníku vytvořený pomocí těchto instrukcí**

*Definice útvaru:* Útvar je rovnoramenný lichoběžník, který je čtyřúhelníkem s dvěma rovnoběžnými stranami o nestejně délce a dvěma shodnými stranami. Vnitřní protilehlé úhly jsou styčné.