

# GEOMETRISKE PUSLESPIL

af Franco Favilli\* og Carlo Romanelli\*\*

## INDLEDNING

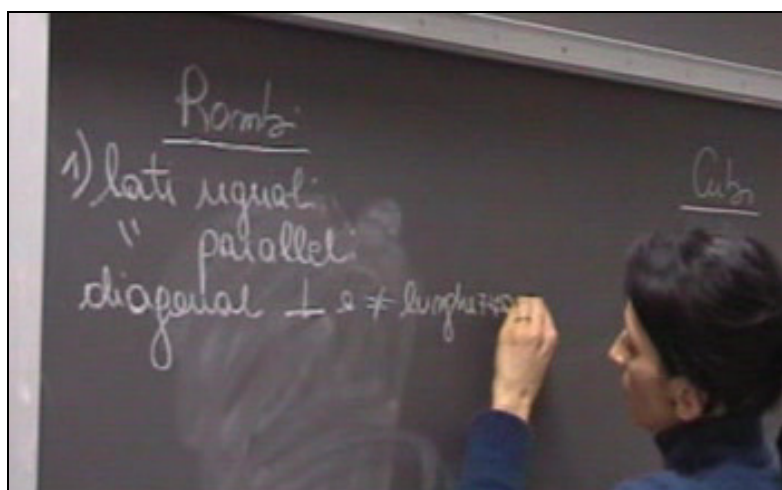
Undervisning i geometri kræver stor viden og beherskelse af terminologi og forestillingsevne. På den anden side er elevernes tilegnelse af geometriske begreber nemmere, når kommunikationen understøttes af en afbalanceret brug af grafisk fremstilling, naturligt sprog og geometrisk sprog.

I den foreslåede øvelse bliver eleverne bedt om at arbejde parvis, den ene skal give den anden en sekvens af instruktioner for at tegne en geometrisk figur. Begge elever bliver derefter bedt om at beskrive figuren og definere den.

Denne geometriundervisning repræsenterer en interessant lejlighed til at understrege nødvendigheden af at fremme forskellige former for repræsentation og koordinationen mellem dem gennem specifikke opgaver, som skal hjælpe med at skifte fra én repræsentation til en anden.

Via dette didaktiske forslag, kan de studerende direkte forestille sig, hvor sofistikeret og udfordrende transformationen fra beskrivelsen af en geometrisk figur til dens definition er for eleverne.

Dette forløb var forberedt og afprøvet på universitet i Pisa samme tid var det også afprøvet på universitetet i Siena og senere ved IUFM i Paris.



\* Centro di Ateneo di Formazione e Ricerca Educativa – CAFRE, Università di Pisa, Italien.

\*\* Istituto Comprensivo “E. Pea”, Seravezza, (LU), Italien.

## Hovedforløb

af Franco Favilli og Carlo Romanelli

### FORSLAGET

Forslaget *Geometriske puslespil* er en god måde at behandle matematisk fremstilling på ved at introducere det i en pæn blanding af teoretiske og praktiske øvelser. Udvidelse og fordybelse kunne nemt føre diskussionen ud over standard indholdet i en grundskoles matematikpensum. Forløbet kræver derfor først og fremmest en definition af, hvilke didaktiske hjælpemidler, der skal anvendes, og udvælgelsen af nogle få matematiske emner, der skal introduceres til videre brug (Hvis de allerede kendes af eleverne)

I starten af lektionen, får eleverne udleveret et stykke papir (Elevvejledningen - Appendiks A) med lidt forklaring til indholdet og reglerne for den didaktiske øvelse. De grundlæggende regler er:

- Eleverne arbejder parvis
- Én fra hvert par får udleveret et stykke papir med navnet på en (plan eller rumlig) geometrisk figur, som skal holdes skjult for partneren indtil øvelsen er slut.
- Den første elev giver den anden elev en sekvens af instruktioner for at tegne figuren
- Kun enkelt instruktioner, som svarer til en enkelt grafisk aktivitet, er tilladt. For eksempel er instruktionen "Tegn et segment" tilladt, mens instruktionen "Tegn akse i segment AN" ikke er tilladt, fordi det først kræver bestemmelse af midtpunktet M på segment AB og derefter skal være vinkelret på AB i punktet M.
- Hver instruktion, som gives/modtages bliver nedskrevet på papir af begge elever
- Om nødvendigt kan en instruktion gentages, men hverken ændret eller forklaret
- Eleverne gør brug af et kvadratisk stykke papir og en kuglepen (ingen blyant, lineal, passer eller lign). Sletning er ikke tilladt.
- Den igangværende tegning må ikke vises.
- Når sekvensen af instruktioner er slut, bliver den færdige tegning vist og sammenlignet med navnet på den givne geometriske figur.
- Begge elever bliver til sidst bedt om at oplyse navn, beskrivelse og til sidst definition af den geometriske figur.
- Diskussion i hele klassen med udgangspunkt i den endelige tegning og de givne instruktioner afslutter øvelsen.

Samme skema bør benyttes af seminarielærerne sammen med de studerende og af de studerende sammen med eleverne på skolen.

Planen og forløbet blev designet og udviklet efter følgende skema i Pisa, timerne repræsenterer hver skridts varighed:

Trin							
Lærere (10T)	Lærere og Lærestuderende (4T)	Lærerstuderende (2t)	Lærestuderend og Elever (2T)		Lærerstuderende (2t)	Lærere og Lærestuderende (4T)	
Forberedelse af det didaktiske forslag	Introduktion Gruppearbejde Diskussion		Introduktion Gruppearbejde Diskussion			Rapport Diskussion	
<b>Mål</b>	<b>Sammenhæng - metodik</b>						
Kort sigt	Videns Kompetencer	Refleksion _ lektionen	Lærerstuderende	Elever	Tænker over forløbet af timen	Lærere	Lærerstuderende
Langt sigt	Metodik Socialiserings Tanker		Viden	Videns Kompetence r		Socialisering	Socialisering
			Metodik				Refleksion - Bemærkninger Afslutning

## Generel information

*Antal seminarielærere: 2*

*Antal studerende: 42*

*Antal klasser involveret i forløbet: 2 (2. og 3. klasse i en grundskole)*

*Antal og alder på elever: 24 elever, 12 år gamle og 22 elever, 13 år gamle*

*Antal voksne i hvert klasseværelse under lektionerne: 2 studerende (for første gang til stede i disse klasseværelser) og læreren.*

## Mål

De uddannelsesmæssige mål med forslaget kan groft deles i generelle og matematiske mål.

Blandt de *generelle mål* betragter vi:

- Udvikling af en forståelse for og kritisk holdning overfor sproget og dets tolkning.
- Forståelse for, hvor vigtigt det er at bruge præcist og entydigt sprog
- Forøge elevernes evne til at forstå og udforme mundtlige instruktioner.
- Stimulering af en "kritisk" lytning til instruktioner
- Forbedring af evnen til at læse, forstå, respektere og anvende reglerne i en didaktisk øvelse.



- Opfattelse af meningen med en enkelt instruktion.
- Evnen til at respektere klassekammeraters tempo.
- Evnen til at forstå årsagen til de foretagne valg under øvelsen.

Blandt de *matematiske mål* betragter vi:

- Forbedret brug af matematisk sprog
- Forbedret kendskab til geometrisk sprog
- Forbedring af tegnefærdigheder.
- Konsolidering af geometrisk viden.
- Evnen til at visualisere tredimensionelle figurer ud fra deres todimensionelle fremstilling og beskrive rumlige figurer på planet.
- Evnen til at beskrive grundplanet og rumlige geometriske figurer samt udpege de egenskaber, der er nødvendige og tilstrækkelige for at definere dem.
- Udvikling af evnen til finde den rette balance mellem beskrivelse og definition af en plan eller rumlig geometrisk figur.
- Forståelse for relevansen af definition indenfor geometri.
- Evnen til at sammenligne og vurdere forskellige former for input i debatten om den korrekte konstruktion af geometriske figurer.

### Vejledning for de studerende

- Læs elevvejledningen (Appendiks B) meget omhyggeligt!
- Lav kommentarer og forslag til lærerens vejledning, som du har modtaget i starten af øvelsen.
- Er reglerne heri klare nok for eleverne?.
- Når du udvikler øvelsen til din klasse, vil du så benytte logbog (dvs. en liste over, hvordan lektionen udviklede sig)?
- Hvor lang tid bør der være afsat til introduktion, udvikling af øvelsen og den afsluttende debat?
- Bør den didaktiske øvelse præsenteres for eleverne som et rollespil?
- I betragtning af, at kommunikationen, både aktiv og passiv, mellem eleverne er meget relevant under denne øvelse, hvilket lingvistisk toneleje vil du benytte overfor eleverne?
- Er det vigtigt, at de elever, der bliver sat sammen, er lige dygtige.
- Med hensyn til den geometriske figur, som skal tegnes: Er det bedst at vælge en figur, som eleverne kender i forvejen, eller er det bedre at vælge en ny figur.
- Hvilke fordele og ulemper er der ved de to valgmuligheder?
- Er det bedst at bruge kvadreret papir eller blankt papir?



- Kun enkelt instruktioner er tilladte. Opfattelsen af enkelt- eller enhedsinstruktioner kan være ret kontroversiel: Vælg, hvordan du vil forklare det for eleverne. Hvorfor og hvordan?
- Hvilke forkundskaber er nødvendige for øvelsen?
- Opstil forskellige mulige instruktions sekvenser til at tegne den valgte geometriske figur.
- Giv eksempler på mulige uklare instruktioner og deraf følgende forskellige tegninger og misforståelser.
- Har du til hensigt at introducere definitionen på den givne geometriske figur?
- Hvordan kan du i denne lektionsplan hjælpe eleverne med overgangen fra beskrivelsen af en geometrisk figur, via (nogle af) dets egenskaber, til dens definition?
- Hvad forventer du af den afsluttende debat? Hvilken værdi tillægger du den?
- Vil du bede eleverne om en slutrapport efter øvelsen? Fra enkeltelever eller fra par?
- Giv kommentarer og lav forslag til ændringer i lærerens vejledning, som du har modtaget i starten af øvelsen.
- Næede du de mål, du havde sat dig i denne lektionsplan?

### Vejledning for eleverne

- Læs vejledningen omhyggeligt!
- Vær sikker på, at du er enig med din lærer og din ven, som du arbejder sammen med, om betydningen af en enhedsinstruktion.
- Det er ikke tilladt at ændre en givet instruktion eller en del af en tegning. Vær meget omhyggelig inden du siger noget eller tegner.
- Hvornår blev du (personen som modtog instruktioner) klar over, hvilken geometrisk figur, der skulle tegnes? Hjalp det dig? Holdt du op med at udføre de instruktioner din ven gav dig (dvs. du begyndte at ignorere dem)?
- Hvor meget var din forudgående viden om geometri anvendelig?
- Hvor svært var det at forstå betydningen af én instruktion? Giv mindst et eksempel
- Modtog du nogen flertydige instruktioner? Hvis du gjorde, giv et eksempel.
- Tegnedu du (personen, som gav instruktioner) den geometriske figur før du begyndte at give instruktioner, eller tegnede du trin for trin det du bad din ven gøre? Hvis du gjorde, hjalp det dig?
- Hvor svært var det at finde passende ord til instruktionen? giv mindst et eksempel.
- Er du tilfreds med eksperimentet? Hvorfor?
- Ville du hellere have byttet rolle med din partner?

- Var det svært at forstå, at nogle egenskaber ved den givne geometriske figur afhang af nogle andre? Giv et eksempel.
- Hvorfor tror du læreren foreslog denne øvelse?
- Kan du skrive en rapport over øvelsen?
- Giv kommentarer og forslag til ændring af den vejledning du fik ved begyndelsen af øvelsen.

## FORLØB

### Øvelseslektionen

I starten af lektionen gav læreren de studerende et blankt stykke papir og elevvejledningen med en forklaring på den øvelse de skulle i gang med. De studerende var inddelt i grupper to og to og de bestemte selv, hvem der skulle give instruktioner, og hvem der skulle modtage dem og lave tegningen. De studerende som skulle give instruktioner fik udleveret et stykke papir med ordet *rombe eller terning*.

Straks de studerende var gået i gang med øvelsen bad nogle af dem om yderligere forklaring på udtrykket *enhedsinstruktion*. Læreren gave dem nogle få ekstra ikke matematiske eksempler. Selve øvelsen startede derfor en halv time efter starten på øvelseslektionen

Efter yderligere en halv time, da alle par havde afsluttet instruktion-tegne-beskrive-definere øvelsen, begyndte diskussionen parvis.



Den efterfølgende debat i klassen blev organiseret i tre trin:

- generelt, hovedsagelig relateret til reglerne i elevvejledningen
- sammenligning af resultaterne (instruktionslisten, tegningerne, beskrivelserne og definitionerne)
- bemærkninger og kommentarer med hensyn til figurerne. Først romben, dernæst terningen.

Diskussionerne og debatten varede i alt tre timer, indtil øvelseslektionen var slut.



De fleste af de studerende mente, at de var blevet klar over, hvor svært det var på en klar og entydig måde at udtrykke selv enkle matematiske koncepter og egenskaber, som en instruktion kræver, når man hovedsagelig udelukkende bruger naturligt sprog og ikke matematisk sprog. Det sværeste var, at finde en god balance imellem de to sprog, når man også skulle tage hensyn til de begrænsninger, der var angivet i elevvejledningen.

Som forventet, var de fleste af tegningerne korrekte, selv om flere studerende mente, at så snart de havde fundet ud af, hvilken figur de skulle tegne, fuldførte de tegningen (næsten) uden hensyn til de følgende instruktioner fra partneren. Dette kunne betragtes som et svagt punkt i denne del af forslaget forløb, fordi det så ville være umuligt at sammenligne instruktionerne med den tilhørende tegning. Det vil derfor være vigtigt at fremhæve og rette elevernes opmærksomhed mod, at alle tegninger skal svare eksakt til instruktionerne uanset, om de er rigtige eller forkerte.

Der blev præsenteret adskillige uklare instruktioner under diskussionen, hvilket gav læreren mulighed for at repetere nogle matematiske begreber for de studerende for at få nogle af dem til at forstå tingene bedre. Det er her vigtigt at nævne, at de studerendes universitetsgrad, for de flestes vedkommende, var indenfor naturvidenskabelige emner, men ikke i matematik. De havde kun haft et eller to kurser i matematik under deres basisuddannelse.

Behovet for en bedre forståelse af nogle grundlæggende matematiske begreber blev som forventet synlig, da diskussionen omkring definitionerne af rombe og terning startede. Ret ofte var forskellen mellem beskrivelsen af egenskaberne og definitionen af en geometrisk figur slet ikke klar. Det er derfor nødvendigt at bruge mere tid på dette og på forskellen mellem et billede/en tegning af en geometrisk figur og selve den geometriske figur selv.

### Lektionen i klasseværelset

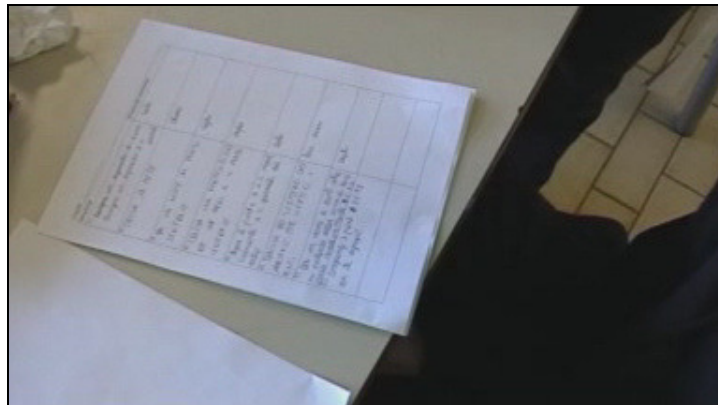
To studerende tilbød at være forsøgslærere i en anden klasse på en mellemskole med anvendelse af romben, og to andre tilbød at være forsøgslærere i en tredje klasse med anvendelse af terningen. Inden forsøget blev de igen bedt om at komme med deres kommentarer og bemærkninger til øvelsen samt de regler, der blev opstillet for eleverne (12-13 år gamle), for at få et effektivt og anvendeligt resultat af forløbet i forhold til de mål, der var opstillet af lærerne, og de eventuelle ændringer, som de

studerende var blevet enige om. Elevvejledningen blev ændret en anelse inden forsøgsundervisningen. De studerende besluttede at arbejde med kvadreret papir og ikke geometriske værktøjer som lineal og trekant.



*De meste relevante resultater, i lighed med de studerendes:*

- Det var nødvendigt at forklare betydningen af enhedsinstruktion bedre
- Nogle instruktører sagde, at det var svært at finde de rette ord til at strukturere nogle af instruktionerne, selv om de havde en klar idé om, hvad de ønskede deres skolekammerater skulle tegne.



- Efter nogle få instruktioner færdiggjorde de fleste af eleverne tegningen og ignorerede (næsten) de efterfølgende instruktioner: Nogle af tegningerne var rigtige selv om instruktionerne var forkerte (Det vigtige var at lykkes, at vinde!)
- Brugen af kvadreret papir gjorde tegningsarbejdet lettere
- Adskillige instruktioner var uklare og derfor vildledende.





*De mest relevante resultater forskellige fra de studerendes:*

- I starten klagede eleverne over sværhedsgraden af den lingvistiske tone, de studerende benyttede både i vejledningen og i den mundtlige kommunikation.
- De fleste elever gjorde god brug af bogstaver til at identificere slutningen af segmenterne.
- De fleste elever havde en ens opfattelse af at beskrive og definere en geometrisk figur.
- De svage elever havde stor fordel af denne form for øvelse
- Den afsluttende debat i klassen startede med, at hvert par fortalte om deres øvelser for hele klassen.
- Rolleskift indenfor parrene var en yderligere øvelse, som eleverne ønskede at prøve med forskellige figurer.

### **Feedback til de studerende**

Ud over de to lærere og alle studerende deltog to elever i feedback mødet

De fire studerende præsenterede forløbet for deres kolleger med kommentarer og bemærkninger samt viste nogle videoklip fra klassen.



De fleste af ovenstående resultater fra forløbet blev fremlagt til specifik diskussion. Det skal imidlertid nævnes, at mens eleverne var aktive i diskussionen, deltog de studerende, som ikke underviste, kun sporadisk i diskussionen.



### *Yderligere emner fra diskussionen:*

- Finde en passende måde at introducere og motivere formålet med øvelsen.
- At fastlægge den korrekte didaktiske kontrakt mellem lærere og elever for gennemførelsen af øvelsen.
- At styre tiden i klassen (Undervisningsforløbet krævede mere tid end planlagt).
- Vurdere det forudgående kendskab til geometrisk software som mulig yderligere hjælp, især til de elever, der bliver bedt om at give instruktioner.
- At bemærke forskellen mellem det rigoristiske matematiske sprog og det fleksible naturlige sprog.
- At fastlægge, hvordan transformationen fra beskrivelsen af en geometrisk figur til dens definition kan vises i en grundskole.

## Andet forløb

af Lucia Doretti\*

### IMPLEMENTERINGSFORSLAG

Øvelsen havde til formål, at få lærerstuderende til at vurdere de forskellige sprog, grafiske og verbale, som forekommer i geometriske afhandlinger og bestemme dets udvikling gennem deres koordinerede interaktion. Det udviklede sig til at blive en interessant mulighed til at understrege behovet for at fremme undervisningen ved at påvirke forskellige sanser og deres koordination igennem specifikke øvelser, der skifter fra den ene til den anden sans.

#### **Aktivitet udviklet i øvelseslektionen**

*Antal lærerstuderende:* 18

*Totale varighed:* fire timer (én time med arbejde i par - tre timer til diskussion)

---

\* Dipartimento di Scienze Matematiche e Informatiche, Università di Siena, Italien.



De studerende blev inddelt i par, og indenfor hvert par blev rollerne som modtager og giver af instruktioner fordelt. Hver studerende fik så udleveret vejledninger med instruktioner, som skulle følges, og resten af materialet. Inden starten var det ved hjælp af nogle eksempler nødvendigt at afklare betydningen af udtrykket "enhedsinstruktion", som var nævnt på papiret, der skulle gøre deltagerne i stand til at tegne figuren trin for trin. På papirerne til dem, som skulle give instruktioner, var angivet ordene *rombe*, *ligebenet trapez* eller *terning*. Ved slutningen af første fase, efter halvanden times arbejde fra lektionens start:

- Hver deltager i parret havde udfyldt deres arbejdsblad med enten deres givne eller modtagne instruktioner, noteret eventuelle kommentarer og givet en definition af figuren.
- Papiret med både navnet på figuren og tegningen blev vist.

Den efterfølgende fase bestod af en kollektiv diskussion af hver enkelt pars arbejde. De studerendes første kommentarer vedrørte de uventede vanskeligheder, som de havde mødt under udførelsen, uanset deres kendskab til de pågældende geometriske figurer. Alle var enige om, at rollen som *instruktionsgiver* var sværere end rollen som *modtager og udfører af instruktionerne*: Dem der gav instruktioner måtte referere til et billede og et navn til figuren, som de kunne huske, for at tolke billedet både præcist og kognitiv samt formulere passende beskeder til dets fremstilling. Nogle erklærede, at det ikke lykkedes for dem at fuldføre listen med instruktioner (selv efter flere forsøg), andre tilstod, at de havde besvær med den måde, de havde formuleret instruktionerne på og var usikre på, om de blev forstået af deres kolleger. Dernæst blev nogle af de studerendes instruktioner vist (på overhead), vurderet og kommenteret af alle ud fra, hvordan disse instruktioner var blevet opfattet og udført af dem, der modtog dem.

I Appendix C har vi medtaget nogle af de kommenterede arbejdsblade fra lektionen.

Hermed var chancen for i samarbejde med de studerende at reflektere over følgende forhold:

- Matematisk sprog og dets rolle i læringsprocessen
- Definitioners rolle i geometri

#### A. Matematisk sprog og dets rolle i læringsprocessen

En passende anvendelse af sproget forudsætter fuld opmærksomhed på de introducerede matematiske termer og angivelse af uklare instruktioner, som kan opfattes på samme måde af alle. I nogle tilfælde blev der givet instruktioner, som tillod tegning af figurer med geometriske karakteristika, der var forskellige fra dem vi ønskede (for eksempel følgende instruktioner: *1. tegn en linie*; *2. tegn en ny linie vinkelret på dens midtpunkt*, fører ikke til en entydig identifikation af en rombe, som det var meningen det skulle).

Vi havde følelsen, at sprogtemaet kunne være materiale for mere arbejde, skønt ikke alle studerende helt erkendte problemet.



Nogle blev forvirrede af den kritiske analyse af de givne instruktioner, da de troede, at "*selvom instruktionerne ikke er helt præcise, leder de modtageren til at interpretere dem og udføre dem korrekt*". I visse tegninger bemærkede vi, at figurerne var de ønskede, men det var ikke muligt at udlede dem fra instruktionerne.

Tendensen i de forkerte eller mangelfulde beskeder var at udfylde informationskløften ud fra den generelle besked ved at bruge opfattelseevnen og regelmæssigheder. Med andre ord ledte den begyndende visualisering af figuren, ud fra de allerede modtagne informationer, modtageren til at fortsætte med en korrekt tegning, selvom instruktionerne ikke var korrekte\*.

Diskussionen fik os også til at tænke på forskellen imellem naturligt sprog, som er karakteriseret ved mangfoldighed og varierende udtryk, og matematisk sprog, i hvilket hvert udtryk har en bestemt betydning og derved bestemmer dets brug.

Endelig blev det bemærket, at der i mange tilfælde blev tilføjet et "fremmed" element i instruktionen til figuren: Vi mener, at vi beskrev figuren som placeret på en generel måde indenfor dets naturlige referenceramme karakteriseret af kanterne på papiret. Dette tydeliggjorde eksistensen af stereotype udtryk i den mentale repræsentation af geometriske forhold (faktisk indeholdt instruktioner ofte udtryk som "vandret" og "lodret": "tegn en horisontal linie" "*tegn en lodret linie, der går igennem midtpunktet*").

Erfaringen fik de studerende til at overveje behovet for at udvikle bestemte øvelser i forhold til at lære at benytte matematisk sprog i undervisningen: Skønt korrekt anvendelse af sproget kræver lang tid om at modnes, er det ikke desto mindre et fundamentalt instrument for læringsprocessen.

### B. Definitionernes rolle

Et andet punkt til overvejelse blev foreslået ud fra spørgsmålet om at definere den tegnede eller beskrevne figur. Spørgsmålet blev opfattet på forskellige måder af de studerende: Nogle angav kun navnet på figuren og andre listede mange egenskaber, ofte flere end der var nødvendige til at karakterisere den

Som eksempel er der her gengivet nogle af de studerendes definitioner af romber, som illustrerer dette forhold, og som blev analyseret under arbejdslektionen:

- Rombe: "Plan geometrisk figur, særligt tilfælde af et parallelogram med modsatte sider parvis parallelle og indvendige vinkler parvis ens, og vinkelrette diagonaler med forskellige længder".
- Rombe: "Firkant, der har lige store sider og ens modstående vinkler".
- Rombe: "Parallelogram med diagonaler vinkelrette på hinanden og ikke ens længder".
- Rombe: "Firkant med fire lige store sider, parvis parallel".

---

\* I en kommentar læste vi "Selv om anvisningerne ikke altid var præcise, fulgte jeg den mest logiske vej (eller måske den mest trivielle!) sikkert på grund af vores geometriske notationer".



Vi reflekterede på betydningen af definition indenfor matematikken og forskellen mellem egenskaber, der *beskriver figuren*, og egenskaber, der *definerer den*. Vi diskuterede i særdeleshed, hvordan vi kunne "minimere" beskrivelsen af egenskaberne for en rombe, så vi kunne identificere de nødvendige og tilstrækkelige karakteristika hver gang. Vi bemærkede, at identifikation af de nødvendige og tilstrækkelige egenskaber er fundamentale i konstruktionen af definitioner, men at de i virkeligheden udgør en vanskelig overgang for eleverne. Vi har derfor behov for operative måder, hvorpå vi sammen med eleverne kan konstruere definitioner, specielt udarbejdet materialer<sup>†</sup> og/eller Cabri software (Konstruktionsmåden i Cabri fremhæver, hvilke nødvendige og tilstrækkelige egenskaber der er medtaget, og derfor hvilken definition, der ligger til grundlag).

Vi påpegede hvordan udstedelsen af en definition er fast knyttet til en klassifikation: dvs. egenskaberne, som er udtrykt ved en definition, omfatter kun genstande, som har disse egenskaber. Vi bemærkede også, hvordan de studerendes definitioner ofte førte til "klassifikation af en delmængde" (kræver at "*en rombe er et parallelogram med vinkelrette og ikke lige store diagonaler*", hvilket medfører at kvadrater fjernes fra klassen af romber). Dette gav mulighed for at nævne det faktum, at Euclid i sine "Elementer" definerer en delmængde med: for eksempel ved i definitionerne af firkanter at hjælpe med at udvælge en delmængde blandt disse figurer. Det valg, vi gør nu om dage, inkluderer definitioner, som tillader inkludering af forhold, som muliggør sammenligning af geometriske figurer, som fremhæver deres analogier og forskelle. Når det er nødvendigt at skelne mellem begreber (f.eks. konkave eller konvekse firkanter), har man brug for at nærme sig en definition af en delmængde. Vi diskuterede det faktum, at klassifikation med inkludering, skønt den er mere kompleks, letter en systematisk udledning af begreber (især begreber, som er en delmængde af mere generelle begreber). Dette er mere forståelig end en klassifikation af en delmængde, og gør det muligt at give hvert geometrisk objekt flere alternative definitioner (*et kvadrat er en rombe med lige store diagonaler eller et rektangel med lige store sider*).

I undervisningen er det fundamentalt ikke at foregribe definitioner før konstruktion af dem i de omgivelser de får mening.

### Øvelse udført i klasserne

*Antal studerende: 2*

*Samlet varighed af øvelsen i hver klasse: to timer (én time til præsentation og udførelse af øvelsen - én time til diskussion)*

Øvelsen blev gennemført af to studerende i deres klasser, henholdsvis i 6. klasse (18 elever 11-12 år gamle) og i 8. klasse (18 elever 13-14 år gamle), og i to 7. klasser (20 og 17 elever 12-13 år gamle). Hver gang var klassens lærer tilstede.

---

<sup>†</sup> For eksempel "dynamic modeller": manipulerende, analyserende og beskrivende dem kan man samle "elementer" til konstruktion og definitioner af figureer, som referer til forskellige egenskaber.



De to studerende præsenterede øvelsen for eleverne som et spil for par kaldet "Find geometriske figurer", hvori én af de to deltagere giver en række "spor", som fører den anden til at "identificere" figuren. Elevernes arbejde var struktureret på samme måde som i øvelseslektionen. Vi havde behov for mere tid end forventet til at forklare, hvordan instruktionerne skulle gives (Ikke desto mindre fandt vi ingen passende formuleringer i det afleverede materiale). De valgte figurer var *rombe, trapez, ligebenet trekant og terning*.

I flere klasser, ønskede eleverne at eksperimentere og prøve begge roller. I en af klasserne udviklede eksperimentet sig til en modifikation af øvelsen ved at undgå eleverne i at hjælpe hinanden gennem udveksling af forbudt information. Følgende fremgangsmåde blev fulgt: begge elever fik udleveret et stykke papir med navnet på en figur (figurerne på de to papirer var forskellige); hver elev skulle skrive en liste med instruktioner, så deres partner kunne tegne figuren; efterfølgende blev instruktionslisten udvekslet, og hver elev kunne læse, kommentere (skriftlig) på de modtagne instruktioner om de ikke var klare nok og tegne figuren. Til sidst skulle de give kommentarer til listen med instruktioner og give den tegnede figur tilbage til partneren.

Til sidst gav hvert par kommentarer til arbejdet overfor deres klassekammerater og underviserne.

### **Kollektiv diskussion og feedback**

*Antal studerende:* 18

*Samlet varighed:* to timer

De studerende, som underviste klasserne, fortalte om deres erfaringer.

Et punkt, som blev fremhævet, var den overraskelse, som eleverne viste, da de skulle i gang med den foreslåede øvelse. Det var noget usædvanligt, og de syntes uforberedte og frygtede, at de ville blive bedømt negativt af læreren. Først efter, at de var blevet forsikret om, at det var et spil, som skulle hjælpe dem med at lære geometri, følte de sig mere afslappede og frie til at udtrykke sig selv.

Adskillige par, særligt i 7. klasse, var påvirkede af, at "de skulle" lave en korrekt tegning af figuren og fik det til at "lykkes" alligevel, selvom det ikke passede med instruktionerne på papiret (et klart tegn på illegal udveksling af information). På grund af dette, indførte underviseren en ændring, da han foreslog øvelsen i den anden 7. klasse, og bad eleverne om at spille den samme rolle simultant, men på to forskellige figurer. Resultatet var, som forventet, mere meningsfyldt og viste generelt god overensstemmelse mellem instruktionerne og den tegnede figur.

Vi bemærkede også, at eleverne, (ligesom de studerende under øvelseslektionen), betragtede det som vanskeligst at give instruktioner og tilstod, at de var i tvivl om den måde de udtrykte sig selv på. De der modtog instruktioner medgav, at de ofte var i problemer og nogle gange tegnede efter, at de selv havde fortolket instruktionerne ("*Hvis jeg ikke forstod hvad det var, ville jeg ikke være i stand til at tegne figuren: nogle data var lidt skøre*").



Nogle af elevernes arbejde blev undersøgt nærmere. Det viste forskellige niveauer for anvendelsen af geometrisk sprog og i nogle tilfælde stor forskel på, hvad eleverne ønskede at beskrive og måden at gøre det på. Et andet forhold vi påpegede, var besværet med at få mening med udtrykket "Giv en definition på den tegnede figur", som for mange elever betød at genkende den og skrive dets navn, og for andre, beskrive nogle af dets egenskaber.

### **Kommentarer**

Den foreslåede øvelse fik de studerende til at overveje en række forhold.

- Besvær med at bruge matematisk sprog korrekt: Usikkerheder, tvivl og fejltagelser ved at give instruktioner viser behovet for at støtte den verbale proces i undervisningen, hvilket motiverer de studerende til ikke kun at udtrykke deres idéer, men også til at gøre det på en klar og korrekt måde for at blive forstået.
- Behovet for at benytte det lingvistiske instrument på en passende måde er et grundlæggende trin mod opbygning af viden, skønt det kræver betragtelig tid til at modnes.
- Behovet for at udvikle øvelser som denne, fordi de giver information om elevernes viden, det begrebsniveau de er nået til, mulige mangler og misforståelse. Denne information er grundlæggende for at blive i stand til at undervise med passende og veltilrettelagte undervisningslektioner.
- Det mere almene behov for at udvikle geometriske lektioner via koordineret brug af forskellige følelsesregistre (mundtlig, grafisk og symbolsk) og anerkendelse af den vigtige rolle som opfattelsesevne og visualisering spiller.

Én lærerstuderende skrev denne kommentar:

*Personlig mener jeg, at den øvelse vi gennemførte var meget spændende. Fordi det ikke er nemt, selv for dem som har et temmelig godt kendskab til emnet, at oversætte det talte sprog til et grafisk sprog og vice versa. Jeg tror derfor, at den samme øvelse, hvis den blev gennemført i en grundskoleklasse, kan skabe interesse og nysgerrighed både hos læreren og eleverne.*

## **Det tredje forløb (på IUFM i Paris) og konklusion**

af Franco Favilli

### **DET TREDJE FORLØB**

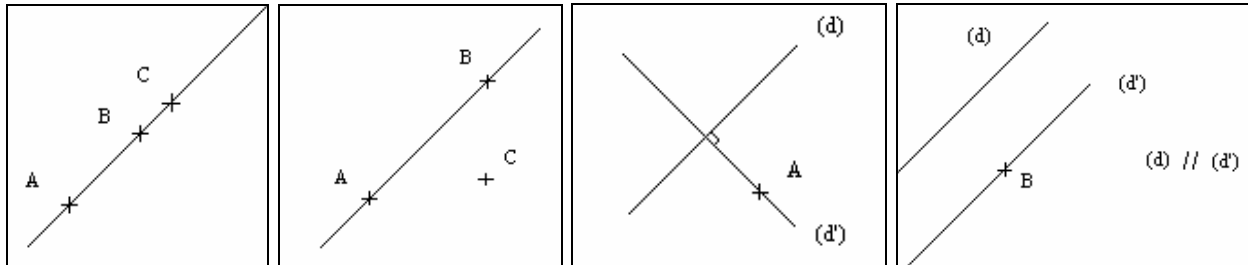
Forslaget blev også prøvet på en lidt anden måde ved I.U.F.M. i PARIS af Catherine Taveau (klasselærer: Cynthia Dobin). Klassen havde 28 elever, 11 til 12 år gamle.

De to principielle formål for læreren var de samme som i de to foregående forløb - at øge elevernes kendskab til geometrisk sprog og lette oversættelsen fra en figurs

udseende til dens egenskaber (dvs. fra hvad der kan ses til hvad der kendes) - forslaget blev gennemført i to lektioner.

### Første lektion

Modtagerne skulle kun tegne figuren i hånden uden geometriske hjælpemidler.

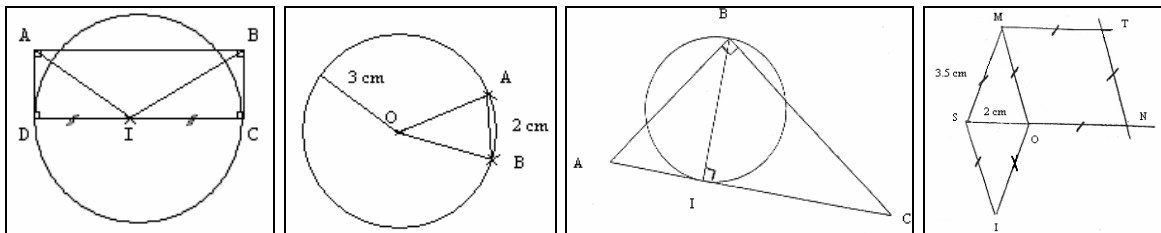


Tegning af linjer

*Kommentarer:* Mange elever prøvede at skrive instruktioner for tegning af nøjagtig samme figur (inklusive f.eks. mål), og i flere tilfælde var instruktionerne ikke præcise nok, men det forhindrede ikke modtagerne i at tegne figuren korrekt.

### Anden lektion

Denne lektion blev gennemført en måned senere. Læreren gav eleverne en mini gløseliste og bad modtagerne tegne figurene præcist (med instrumenter)



Tegning af cirkler

*Kommentarer:* Instruktionerne for de tre første figurer var næsten korrekte, undtagen for den sidste. Læreren besluttede at udvide lektionen med en computerøvelse, brug af Cabri Géomètre.

Læreren var meget interesseret i dette arbejde og blev overbevist om elevernes besvær med at benytte et præcist geometrisk sprog i den alder. Men det blev klart for hende, at sådanne opgaver (inklusive de med Cabri) er en god måde for eleverne til at forstå forskellene mellem at beskrive og definere en figur.

## KONKLUSION

For at gøre eleverne mere opmærksomme på forskellen mellem at beskrive og definere en figur og indføre dem i begreberne for definitionen af en figur, besluttede de studerende, som tog ud til skolen:

- først at bede eleverne lave en liste over egenskaber de kunne "se" ved den givne figur;





- dernæst, at vurdere hver af disse egenskaber og sammenligne dem med de andre;
- til sidst, at slette egenskaber fra listen, hvis de mente de var en konsekvens af én af de andre.

Eleverne blev på denne måde overbevist om, at de "overlevende" egenskaber repræsenterer en bedre, mere forfinet og kortere beskrivelse af figuren: noget ækvivalent med eller meget tæt på, hvad læreren kaldte dets "definition". Diskussionen i hele klassen om de forskellige gruppers lister, i særdeleshed forklaringerne på grunde til sletninger, bidrog i høj grad til at gøre introduktionen af et af de mest komplekse og sofistikerede matematiske emner, begrebet definition, både attraktiv og effektiv.

Det er vigtigt at nævne, at de tre forløb viste, hvor relevant det er for eleverne (studerende og elever) ikke kun at beherske det geometriske sprog, men også at være i stand til at organisere og udtrykke en algoritmisk proces (et instruktions sæt)<sup>‡</sup> for at fremstille det ønskede produkt (tegningen), via en anden elev, som kun skal udføre instruktioner. Det er allerede nævnt, hvor svært det er (eller umuligt) for eleverne at opføre sig som eksekutor. Deres hidtidige kendskab til en figur, skubbede dem ofte hen imod den korrekte tegning uanset de modtagne instruktioner. Det viser, hvor vigtigt det er ved introduktion af øvelsen, at påpege vigtigheden af at respektere de modtagne instruktioner på den måde de gives og opfattes. For elever, specielt skoleelever, er ønsket om at være rigtig, "at vinde" for stærk til at modstå enhver regel!

Med hensyn til den ubalance, som kunne ses i de opgaver der blev givet til parret (instruktionsgiver og instruktionsmodtager) anbefales det stærkt at gentage øvelsen med en anden figur og omvendte roller, som det blev gjort i de to første forløb.

## LITTERATUR

- Ellerton, N.F. and Clarkson, P.C. (1996). Language Factors in Mathematics Teaching and Learning, in Bishop A.J. et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 987-1033). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Favilli, F., Japelt, A. and Novotná, J. (2005). Developing good practices for teacher training focused on understanding classroom environment, in Novotná J. (ed.), *Proceedings of SEMT '05 – International Symposium Elementary Maths Teaching* (pp. 335-336). Charles University, Prague.
- Favilli, F. and Villani, V. (1993). Disegno e definizione del cubo: un'esperienza didattica in Somalia. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 16, n.10, 907-925.
- Maier, H. (1995). Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi. *La matematica e la sua didattica*, 3, 298-235.
- UMI-CIIM (2001). *Matematica 2001, Materiali per il XXVII Convegno Nazionale sull'Insegnamento della matematica*. Lucca: Liceo Scientifico "A. Vallisneri".

<sup>‡</sup> Denne egenskab kan ikke tages for givet selv med studerende eller lærere som det var klart vist iden workshop om foslaget, der var organiseret, som en del af de videnskabelige aktiviteter på Congress SEMT '05 in Prague.

## Appendiks A1: Geometriske puslespil – Elevvejledning

### Materialer til øvelsen:

Øvelsen kan gennemføres udelukkende ved hjælp af et stykke papir, en blyant og det skema, der skal udfyldes

- ✓ Eleverne arbejder parvis. Hver elev i parret spiller en bestemt rolle: Den ene elev (**instruktøren**) giver instruktioner, og den anden elev (**tegneren**) laver en tegning ved at følge de instruktioner, han modtager.

#### Instruktøren

Du får udleveret et stykke papir med navnet på en plan eller rumlig geometrisk figur, som ikke må vises eller nævnes for andre.

**Dit mål er, at få din klassekammerat til at tegne den givne figur trin for trin ved hjælp af en rækkefølge af instruktioner.**

1. Hvis du ønsker, kan du tegne figuren enten før eller under spillet.
2. Du må kun give enhedsinstruktioner, dvs. hver enkelt instruktion skal gøre din klassekammerat i stand til kun at tegne en enkelt del af den geometriske figur. Lad os forklare det med et ikke-matematisk eksempel: Hvis der på papiret var skrevet *dække bord*, kunne den første relevante enhedsinstruktion (og derfor tilladte instruktion) være:

*Læg dugen på - læg en kniv på - læg en gaffel på – ...*

Mens ingen af følgende instruktioner ville være tilladte:

*Dæk bordet til frokost - vi bruger det hver dag til vores måltider.*

#### Tegneren

Din klassekammerat får udleveret et stykke papir med navnet på en plan eller rumlig geometrisk figur. Han/hun beder dig om at tegne figuren ved at give dig en rækkefølge af instruktioner.

**Din opgave er at tegne den givne figur trin for trin.**

1. Nedskriv, hver instruktion du modtager samt dine kommentarer, hvis du har nogle. Benyt det specielle skema, du har fået udleveret.
2. Hvis en instruktion ikke er forståelig, kan du bede instruktøren gentage den, men ikke at forklare den.
3. Hvis instruktionen stadig ikke er forståelig, kan du skrive den ned og tilføje dine egne kommentarer på skemaet.
4. Udfør instruktionen og fortæl instruktøren, hvornår du er klar.
5. Du skal ikke lave korrekturer på tegningen. Hvis du bliver klar over, at du har lavet en fejl, skal du skrive det på skemaet.
6. Når den sidste instruktion er blevet udført, skal du skrive navnet på figuren, en beskrivelse af den og definitionen på den.
7. Den endelige tegning må først vises for instruktøren og hele klassen, når alle par er færdige.



3. Du kan bruge nogle matematiske ord som *linie, akse, vinkel osv.* når du giver instruktioner, men du må ikke bruge navne på polygoner (trekanter, kvadrater etc.), geometriske formler og navne på emner med den geometriske figur (f.eks. hvis en figur er en cirkel, kan du ikke sige "*tegn et hjul*").
4. Nedskriv alle instruktioner på det skema, du har fået udleveret. Skriv også dine kommentarer, hvis du har nogen.
5. Hvis tegneren beder dig om at gentage en instruktion, må du kun gøre det ved at bruge de samme ord.
6. Du kan først give den næste instruktion, når tegneren har udført den foregående
7. Når den sidste instruktion er udført, skal du skrive en beskrivelse og en definition af figuren



**Appendiks B2: Geometriske puslespil – Instruktionsskema**

Par \_\_\_\_\_

Instruktioner	Kommentarer
1)	
2)	
.....	

Navnet på figuren: \_\_\_\_\_

Beskrivelse af figuren: \_\_\_\_\_

Definition af figuren: \_\_\_\_\_

## Appendiks C: Geometriske puslespil – Lærervejledning

Målet med denne vejledning er, at hjælpe lærerne med at tilpasse undervisningsøvelsen til klassens kompetencer. Eftersom øvelsen er rettet mod grundskoleelever, skal vi tage i betragtning, at i denne alder (11 - 14 år) er elevernes sind ved at åbne sig for abstrakte begreber. At bevæge sig fra konkrete til abstrakte begreber er kendetegnende for denne alder

### **Mål**

Formålet med øvelsen er på den ene side, at styrke elevernes evne til at bruge det geometriske sprog, og på den anden side, at udvikle lærerens evne til at opbygge geometriske begreber i elevernes hukommelse uden at være for meget bundet af definitioner.

### **Nødvendig baggrundsviden**

Øvelsen kræver, at eleverne kender nogle få geometriske begreber som linie, vinkel, vinkelrette og parallelle linier.

### **Supplerende undervisningsmateriale**

Geo-plane er et velegnet hjælpemiddel til øvelsen, fordi det kan repræsentere et virkeligt billede af et rumligt emne. Endvidere begrænser det ikke elevernes frie tankegang.

### **Beskrivelse og bemærkninger**

- Øvelsen bliver præsenteret for eleverne som et *spil*, hvilket nedtoner deres ængstelse i forhold til en mulig bedømmelse, og får dem til at indleve sig i undervisningsforsøget uden stress. Øvelsen bør introduceres som et *rollespil*. Der er to meget forskellige roller:
  - eleven, som giver instruktioner (*instruktøren*)
  - eleven, som modtager instruktioner (*tegneren*)

Instruktøren får udleveret et stykke papir med navnet på en geometrisk figur, og det er meningen, at han skal instruere tegneren til at tegne den.
- Præsentationen* skal passe til elevernes alder. Læreren bør derfor ikke anvende bydeform, som er autoritær og minder om det sprog, som hyppigt bliver anvendt i matematiklærebøger (dvs. *beregn følgende udtryk, løs følgende problem*), men bør nærmere anvende første person flertal. Om nødvendigt kan bydeformen imidlertid opblødes ved brug af en spørgende form sammen med verbet *kan*.
- For denne type af øvelse behøver parrene ikke nødvendigvis være homogene, da målet er *kommunikation* mellem eleverne, både aktiv og passiv. Læreren kan imidlertid danne mindst et homogent par. I første fase af øvelsen er arbejdet parvis vigtigt for at fremme socialiseringen.
- Med hensyn til den *geometriske figur*, som skal tegnes, står valget mellem en figur, som eleverne allerede har studeret, og en ny figur. På den ene side kan baggrundsviden til den geometriske figur forstærke elevernes kendskab til dens egenskaber og lette kommunikationen indenfor parret. På den anden side kan det aktivere elevernes præindstillede mentale skemaer. For eksempel kan eleven, som modtager instruktionerne, på et bestemt punkt fortsætte med tegningen, bare fordi han/hun forstår hvilken figur, der skal tegnes, og ikke på grund de instruktioner han/hun får fra hans/hendes partner. Noget lignende kunne ske for eleven, som giver instruktionerne, fordi han/hun næsten ikke forstår de forskellige tolkninger af hans/hendes egne instruktioner, for eksempel instruktionen *tegn to parallelle sider* gør det ikke forståeligt:
  - a) om siderne er kongruente eller ikke
  - b) hvilken afstand der er mellem siderne
  - c) om siderne har et endepunkt på en fælles vinkelret linie eller ikke



sandsynligvis vil eleven, som modtager instruktionen, tegne to parallelle sider i et kvadrat.

Hvis vi anvender en for eleverne ukendt figur i stedet for, vil de være meget mere omhyggelige med den måde de giver instruktioner på, ligesom på den måde de udfører dem på, fordi de ikke har opbygget noget mentalt skema endnu. På denne måde vil øvelsen måske blive vanskeligere for eleverne.

5. Brugen af kvadreret papir kan lette opgaven for begge elever i parret (den, som giver, og den, som modtager instruktionerne). Det kan imidlertid udgøre en begrænsning, fordi det kan foreslå elevernes præferencerute (dvs. instruktionen tegn en linie kunne efterfølges af tegning af en skrå linie med  $45^\circ$  hældning, ved hjælp af kvadraterne på papiret).

Hvis læreren beslutter at bruge blankt papir, vil det være fornuftigt at tillade eleverne at anvende både lineal og trekant.

Eleven, som giver instruktioner, bør også have et stykke papir, hvorpå han/hun kan tegne figuren som en slags visuel understøttelse. Faktisk har elever i denne alder (11 til 14 år) dårlige abstraktionsevner, og tegning af figuren ifølge deres egne instruktioner kan lette deres eget forløb af proceduren.

6. Da øvelsen er baseret på kommunikation mellem eleverne i hvert par, bør læreren rette elevernes opmærksomhed på det faktum, at kun enhedsinstruktioner er tilladte. Begrebet en enkelt eller *enhedsinstruktion* kan være temmelig kontroversielt. Det er op til læreren at foretage et valg og forklare det for eleverne. For at få tegnet diagonalerne i en rombe, kan man for eksempel give to forskellige slags instruktioner:

- a) *tegn linie AB - kald midtpunktet M - tegn en linie MC vinkelret på AB - tegn linie MD kongruent med og hosliggende med MC* (en sekvens af fire enhedsinstruktioner).
- b) *Tegn to vinkelrette linier, som skærer hinanden i deres midtpunkter* (kun én ikke enhedsinstruktion).

I øvelsen, som udleveres til eleverne, kan det været nyttigt at give et eksempel på en enhedsinstruktion - ikke fra en matematisk sammenhæng men fra det daglige liv - for at få dem til at føle sig frie til at udvikle øvelsen.

7. I slutningen af øvelsen bliver eleverne bedt om:

- a) at skrive navnet på den figur de har tegnet
- b) at beskrive den
- c) at definere den.

Denne sidste fase af øvelsen er nyttig for elevernes konstruktion af egenskaberne for den givne geometriske figur via indledende trin til dens definition. Endvidere, afhængig af klassens sammensætning, bør læreren vælge, om han vil bede om definitionen af den geometriske figur eller ikke.

8. Den afsluttende debat i klassen er en vigtig fase af øvelsen, fordi det giver læreren og hele klassen mulighed for at betragte de endelige tegninger, at sammenligne de forskellige instruktionssæt og de skitserede tegninger for hvert par, at høre og diskutere forskellige ideer om den givne figur. I betragtning heraf kan følgende strategier følges:

- Først kan et par præsentere og beskrive deres øvelse for klassekammeraterne, som bliver bedt om at stille spørgsmål og give kommentarer, så betingelserne for en virkelig diskussion mellem parterne opstår.
- Efter dette kan en ændring af parrenes sammensætning foreslås, f.eks. kan instruktøren i et par nu arbejde som tegner af en anden figur. Denne strategi skal få eleverne til at forstå vigtigheden af, at anvende et entydigt matematisk sprog og en entydig terminologi.



### 9. Ændringer til øvelsen

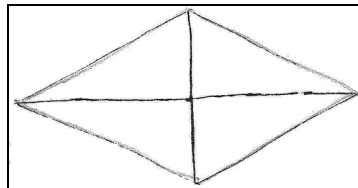
- At give alle eleverne i klassen samme instruktioner til tegning af en given geometrisk figur. Nogle af disse instruktioner kunne gives på en flertydig måde, for at undersøge elevernes reaktion på de forskellige fortolkninger.
- At bede eleverne arbejde på en tegning af en ikke standard geometrisk figur.
- At danne forskellige grupper i klassen. Hver gruppe vælger en geometrisk figur og fastsætter en sekvens af enhedsinstruktioner til at tegne den. Læreren bliver af hver gruppe bedt om at være dets tegner og tegne den valgte figur.
- At danne forskellige grupper i klassen. Hver gruppe laver et sæt enhedsinstruktioner til tegning af en geometrisk figur og giver dem til en anden gruppe og vice versa, som i en konkurrence.



## Appendiks C: Geometriske puslespil

### Rombe

Instruktionsliste	Kommentarer fra modtageren
1 Tegn en vandret linie	
2. Find midtpunktet på linien	
3. Tegn en lodret linie igennem midtpunktet	
4 Punkter på linien skal være lige langt fra liniens endepunkter	“Man kan ikke forstå hvilke linier der refereres til”
5. De to linier skal være lige lange	
6. Forbind de to liniers endepunkter.	



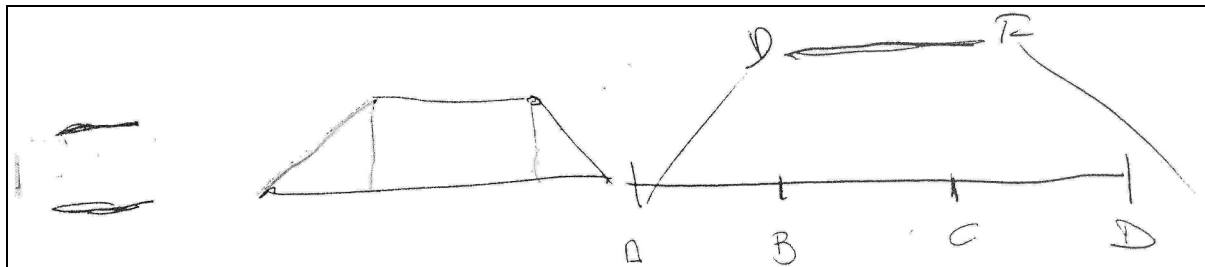
**Tegning af rombe**

*Definition af figuren* (fra instruktionsmodtageren) - "Rombe: parallelogram med diagonaler, der står vinkelret på hinanden, men som ikke er lige lange".

*Definition af figuren* (fra instruktionsgiveren) - "Rombe: plan geometrisk figur, der kan betragtes som et særligt tilfælde af et parallelogram med de modsatliggende sider parallelle, de indvendige vinkler er parvis lige store og diagonalerne vinkelret på hinanden, men ikke lige lange".

### Ligebenet trapez

Instruktionsliste	Kommentarer fra dem, der giver instruktioners	Kommentarer fra dem, der modtager instruktioner
1. Tegn en vandret linie		
2. Opdel den vandrette linie i tre lige store dele		
3. Mærk de fire punkter på linien i rækkefølge A, B, C, D		“Vi blev ikke bedt om at starte fra venstre ”
4. Tegn en linie parallel med BC	“Var jeg ikke tydelig? Jeg glemte en sætning: Find et punkt vinkelret på AB i forhold til punkt B og vinkelret på CD i forhold til punkt C”	Jeg kan tegne hvor som helst, men jeg valgte at tegne over BC og med samme længde”
5. Mærk linien EF		
6 Forbind A og E		
7. Forbind D og F		



**Tegning af trapezet**

*Definition af figuren:* Figuren er et ligebenet trapez, som er en firkant med to parallelle sider med forskellige længder og to lige sider. Indvendige modstående vinkler er supplementvinkler