

PUZZLE GEOMETRICI

di Franco Favilli* e Carlo Romanelli**

INTRODUZIONE

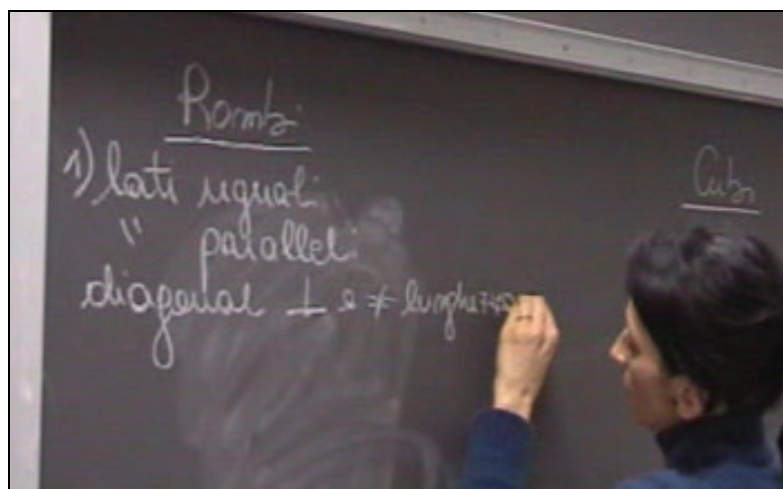
Il discorso geometrico richiede una buona conoscenza e padronanza della terminologia e delle nozioni. D'altra parte, l'acquisizione di concetti geometrici da parte di chi apprende è facilitata quando la comunicazione è sostenuta da un uso bilanciato del linguaggio grafico, del linguaggio naturale e del linguaggio geometrico.

Nell'attività proposta agli allievi è richiesto di lavorare in coppie, uno di essi avendo il compito di fornire all'altro una sequenza di istruzioni per il disegno di una figura geometrica. Ad entrambi gli allievi viene poi richiesto di descrivere la figura e di definirla.

Questa attività di insegnamento della geometria può rappresentare una interessante opportunità per sottolineare la necessità di promuovere l'utilizzo di differenti registri di rappresentazione ed il loro coordinamento tramite compiti specifici che mirano a convertire uno nell'altro.

Tramite questa proposta didattica i docenti in formazione possono anche accorgersi direttamente quanto sia delicato e complesso per gli allievi il passaggio dalla descrizione di una figura geometrica alla sua definizione.

Questa proposta è stata preparata e sperimentata nell'Università di Pisa. È stata anche sperimentata, contemporaneamente, nell'Università di Siena e, più tardi, allo IUFM di Parigi.



* Centro di Ateneo di Formazione e Ricerca Educativa – CAFRE, Università di Pisa, Italia.

** Istituto Comprensivo “E. Pea”, Seravezza (LU), Italia.

La sperimentazione principale

di Franco Favilli e Carlo Romanelli

LA PROPOSTA

La proposta *Puzzle geometrici* sembra corrispondere ad un buon modo di trattare nozioni matematiche, tramite la loro introduzione per mezzo di una buona miscela di attività teoriche e pratiche. L'estensione e l'approfondimento di questa proposta potrebbe portare facilmente la discussione ben al di là dei contenuti standard di un curriculum di matematica per la scuola secondaria inferiore. La sua sperimentazione richiede pertanto, prima di tutto, la definizione di obiettivi didattici specifici e la scelta di solo alcune delle possibili nozioni da introdurre o da utilizzare di nuovo (nel caso esse siano già state messe a disposizione degli alunni).

All'inizio della lezione, gli allievi ricevono un foglio di carta (la *Guida per l'allievo*, vedi Allegati A) con alcune spiegazioni sul contenuto e sulle regole per lo svolgimento dell'attività didattica. Le regole di base sono:

- Gli allievi lavorano a coppie.
- Ad un membro di ciascuna coppia viene dato un pezzo di carta con il nome di una figura geometrica (piana o solida) che deve essere mantenuta segreta al compagno fino alla fine dell'attività.
- Il primo allievo fornisce all'altro una sequenza di istruzioni su come disegnare la figura.
- Sono consentite solo istruzioni *unitarie*, che corrispondono ad una singola attività grafica del compagno. Ad esempio, l'istruzione "Disegna un segmento" è consentita; l'istruzione "Disegna l'asse del segmento AB" non è consentita in quanto richiede la determinazione del punto di mezzo M del segmento AB, prima, e della perpendicolare in M ad AB.
- Ogni istruzione data/ricevuta viene scritta su un foglio da entrambi gli allievi.
- Se necessario, una istruzione può essere ripetuta, ma non modificata né spiegata.
- Per gli alunni che fanno il disegno, fare uso di un foglio di carta a quadretti ed una penna (niente lapis, riga, compasso, ecc.). Non sono consentite cancellazioni.
- Il disegno non può essere mostrato durante la fase di esecuzione.
- Quando la sequenza di istruzioni è terminate, il disegno finale viene mostrato e confrontato con il nome della figura geometrica assegnata.
- Ad entrambi gli alunni viene chiesto di dare il nome, la descrizione ed infine la definizione della figura geometrica.
- Una discussione nell'intera classe, basata sui disegni finali e le istruzioni date, conclude l'attività.

Il medesimo schema dovrebbe essere usato sia dai formatori con i docenti in formazione che dai docenti in formazione con gli alunni a scuola.

A Pisa, il piano di sviluppo dell'attività è stato predisposto ed attuato secondo lo schema seguente; le ore rappresentano la durata di ogni fase:

Fasi									
Formatori (10h) Preparazione della proposta didattica	Formatori e docenti in formazione (4h) Introduzione Lavoro di gruppo Discussione	Docenti in formazione (2h)	Docenti in formazione e alunni (2h) Introduzione Lavoro di gruppo Discussione		Docenti in formazione (2h)	Docenti in formazione e Formatori (4h) Relazione Discussione		Docenti in formazione (4h)	Formatori (5h) Relazione finale
Obiettivi		Metodologia in-contesto							
A breve termine	Conoscenze Competenze	Riflessione Programmazione	Docenti in formazione	Alunni	Riflessione sulla lezione Relazione	Formatori	Docenti in formazione	Riflessione – Osservazioni Programmazione finale Relazione ai docenti in formazione	
A lungo termine	Metodologia Socializzazione		Conoscenze	Conoscenze Competenze		Socializzazione	Metodologia		

Informazioni generali

Numero di formatori: 2 (un docente universitario ed uno di scuola secondaria inferiore)

Numero di docenti in formazione: 42

Numero di classi coinvolte nella sperimentazione: 2 (una seconda ed una terza classe di scuola secondaria inferiore)

Numero ed età degli alunni: 24 alunni di 12 anni (2^a classe) e 22 alunni di 13 anni (3^a class)

Numero di adulti in ciascuna classe durante le lezioni: 2 docenti in formazione (presenti per la prima volta in quelle classi) e l'insegnante

Obiettivi

Gli obiettivi educativi della proposta possono essere grosso modo divisi in obiettivi generali e disciplinari.

Fra gli *obiettivi generali* si possono considerare:

- Lo sviluppo di consapevolezza ed atteggiamento critico rispetto all'uso della lingua e della sua interpretazione.
- La consapevolezza di quanto sia importante fare uso di un linguaggio specifico e non ambiguo.
- La crescita della capacità degli allievi di comprendere ed elaborare istruzioni orali.



- La stimolazione di un ascolto critico delle istruzioni.
- Il miglioramento della capacità di leggere, comprendere, rispettare ed applicare le regole dell'attività didattica.
- L'acquisizione della nozione di istruzione unitaria.
- La capacità di rispettare i tempi dei compagni.
- La capacità di enunciare i motivi delle scelte fatte ed usate durante l'attività.

Fra gli *obiettivi matematici* si possono considerare:

- Il migliore uso del linguaggio matematico.
- Il rafforzamento della conoscenza del linguaggio geometrico.
- Il miglioramento delle capacità di disegnare.
- Il consolidamento delle conoscenze geometriche.
- La capacità di visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali e di rappresentare figure solide nel piano.
- La capacità di descrivere figure geometriche piane e solide evidenziandone le proprietà necessarie e sufficienti per la loro definizione.
- Lo sviluppo dell'abilità di trovare un giusto equilibrio fra la descrizione e la definizione di una figura geometrica piana o solida.
- La consapevolezza della rilevanza della definizione in geometria.
- La capacità di confrontare e valutare differenti tipi di indicazioni che emergono dalla discussione nel contesto di una corretta costruzione del concetto di figure geometriche.

Compiti per i docenti in formazione

- Leggi molto attentamente la *Guida per l'insegnante* (vedi Allegato B)!
- Fai commenti e proposte di modifica della *Guida per l'allievo* che hai ricevuto all'inizio dell'attività.
- Le *regole* assegnate sono abbastanza chiare per gli alunni?
- Quando svolgerai l'attività nella tua classe, farai uso di un *diario di bordo* (un resoconto di come si è svolta la lezione)?
- Quanto *tempo* dovrebbe essere assegnato all'introduzione, allo sviluppo dell'attività ed alla discussione finale?
- L'attività dovrebbe essere presentata agli alunni come un *gioco di ruolo*?
- Considerando che la *comunicazione*, sia attiva che passiva, fra gli alunni è piuttosto rilevante in questa attività, che tipo di *registro linguistico* userai con gli alunni?
- È importante che le coppie di alunni siano *omogenee* rispetto alle loro capacità?
- Riguardo alla *figura geometrica* da disegnare, è meglio scegliere una figura che gli alunni già conoscono od una nuova?



- Quali sono i *vantaggi* e gli *svantaggi* di usare una figura conosciuta o sconosciuta?
- È meglio usare un *foglio a quadretti* od un *foglio bianco*?
- Sono consentite solo istruzioni singole. La nozione di istruzione unitaria o singola potrebbe essere piuttosto controversa: fai la tua scelta e spiegala agli alunni. Perché e come?
- Quali *prerequisiti* sono richiesti per l'attività?
- Fai un elenco di possibili *sequenze di istruzioni* per il disegno della figura geometrica scelta.
- Dai esempi di possibili *istruzioni ambigue* e dei conseguenti differenti disegni ed *equivoci*.
- Hai come obiettivo l'introduzione della *definizione* della figura geometrica assegnata?
- Come puoi aiutare gli alunni, per mezzo di questo modulo didattico, nel passaggio dalla *descrizione* di una figura geometrica, tramite (alcune) sue proprietà, alla sua *definizione*?
- Che cosa ti aspetti dalla *discussione finale*? Che ruolo le dai?
- Chiederai agli alunni una *relazione finale* sull'attività? Ai singoli od alle coppie?
- Fai commenti e proposte di modifica della *Guida per l'insegnante* che hai ricevuto all'inizio dell'attività.
- Hai raggiunto gli *obiettivi* che ti eri posto/a per questo modulo didattico?

Compiti per gli alunni

- Leggi molto attentamente la *Guida per l'allievo*!
- Sii certo di avere concordato col tuo insegnante ed il tuo compagno nella coppia sul significato di *istruzione unitaria*.
- *Non è consentito correggere* un'istruzione data od una parte del disegno. Stai molto attento prima di parlare o disegnare!
- Quando ti *sei accorto* (tu che stavi ricevendo le istruzioni) qual era la figura che doveva essere disegnata? Ti è servito? Hai smesso di *eseguire le effettive istruzioni* date dal tuo amico (cioè, hai cominciato ad ignorarle)?
- Quanto ti sono state utili le tue *pre-conoscenze geometriche*?
- Quanto è stato difficile *comprendere* il significato dell'istruzione? Dai almeno un esempio.
- Hai ricevuto qualche *istruzione ambigua*? Se sì, dai un esempio.
- Hai *disegnato* (tu che stavi dando le istruzioni) la figura geometrica *prima* di iniziare a dare le istruzioni o l'hai disegnata passo dopo passo, facendo in questo modo ciò che stai chiedendo al tuo compagno di fare? Se è successo, ti ha aiutato?

- Quanto è stato difficile trovare le *parole appropriate* per dare un'istruzione? Dai almeno un esempio.
- Sei *soddisfatto* dell'esperienza? Perché?
- Ti sarebbe piaciuto di più *scambiare i ruoli* col tuo compagno?
- È stato difficile accorgersi che alcune *proprietà* della figura geometrica assegnata *dipendono* da alcune altre? Dai un esempio.
- Perché, secondo te, il tuo insegnante *ha proposto* questa attività?
- Farai una *relazione* di questa attività?
- Fai commenti e proposte di *modifica* della Guida per l'allievo che hai ricevuto all'inizio dell'attività.

LA SPERIMENTAZIONE

La sessione di formazione

All'inizio della sessione i formatori hanno dato ai docenti in formazione un foglio di carta bianca e la Guida per l'allievo con la spiegazione dell'attività che stava per iniziare. I docenti in formazione sono stati raggruppati in coppie ed hanno deciso chi doveva dare le istruzioni e chi doveva riceverle e fare il disegno. Quelli che davano le istruzioni hanno ricevuto un foglietto con la parola *rombo* o *cubo*.

Appena i docenti in formazione hanno iniziato l'attività, alcuni di loro hanno chiesto maggiori spiegazioni sul significato del termine *istruzione unitaria*. I docenti formatori hanno dato alcuni altri esempi, non matematici. L'attività è cominciata pertanto mezz'ora dopo l'inizio della sessione di formazione.

Dopo un'altra mezz'ora, quando tutte le coppie hanno terminato l'attività di istruzioni-disegno-descrizione-definizione, sono iniziate le discussioni all'interno delle coppie.



I docenti in formazione discutono fra loro

La successiva discussione nella classe è stata organizzata su tre fasi:

- problematiche generali, principalmente relative alle regole stabilite nella Guida per l'allievo;
- confronto dei prodotti (lista delle istruzioni, disegni, descrizioni e definizioni);

- osservazioni e commenti sui prodotti, riguardo al rombo, prima, ed al cubo, dopo.

Le discussioni ed il dibattito sono durati tre ore, fino alla fine della sessione di formazione.



Una docente in formazione presenta la sua esperienza

La maggior parte dei docenti in formazione hanno dichiarato di essersi accorti di come sia difficile esprimere in maniera chiara e concisa, come dare un'istruzione richiede, persino concetti e proprietà matematiche semplici, facendo principalmente uso solo del linguaggio naturale e non del linguaggio matematico. Il compito più difficile è stato trovare un buon equilibrio fra i due linguaggi, tenendo anche conto delle restrizioni date nella Guida per l'allievo riguardo all'uso della terminologia matematica.

Come previsto, la maggior parte dei disegni sono stati corretti, anche se molti docenti in formazione hanno detto che, una volta che hanno capito qual era la figura da disegnare, hanno completato il disegno (quasi) ignorando le successive istruzioni da parte del compagno di coppia. Questo potrebbe essere considerato un punto debole in questa parte di sperimentazione della proposta, perché in tali casi è stato impossibile confrontare le specifiche istruzioni con i relativi disegni. Sarebbe pertanto importante dare maggiore enfasi e richiamare l'attenzione degli allievi sul fatto che qualsiasi disegno deve corrispondere esattamente alle istruzioni ricevute, senza preoccuparsi del fatto che sia corretto o sbagliato.

Durante la discussione sono state presentate diverse istruzioni ambigue, permettendo così ai formatori di ricordare ai docenti in formazione alcuni concetti matematici e/o di far meglio capire alcuni di essi. È importante qui evidenziare che gli studi universitari di tutti i docenti in formazione della classe sono stati in materie scientifiche, ma non in matematica. Nei loro corsi di laurea hanno frequentato solo uno o due corsi di matematica.

La necessità di una migliore acquisizione di alcune nozioni matematiche di base è divenuta evidente, come previsto, quando è iniziata la discussione sulle definizioni di *rombo* e *cubo*. Abbastanza spesso la relazione fra la descrizione delle proprietà e la definizione di una figura geometrica non era per niente chiara. È stato pertanto necessario passare molto tempo su questo e sulla differenza fra l'immagine/disegno di una figura geometrica e la figura geometrica stessa.

La sessione in aula

Due docenti in formazione si sono offerti di sperimentare l'attività didattica in una classe seconda di scuola media, usando il rombo, e due altri si sono offerti di sperimentarla in una classe terza, usando il cubo. Prima della sperimentazione, i formatori hanno chiesto di nuovo ai docenti in formazione di fare i loro commenti ed osservazioni sull'attività e sulle regole da dare agli alunni (di 12-13 anni) per un impatto efficace ed utile della sperimentazione, coerentemente agli obiettivi fissati all'inizio dai formatori e le possibili modifiche appena concordate fra i docenti in formazione. La Guida per l'allievo viene leggermente modificata prima di andare nella scuola.

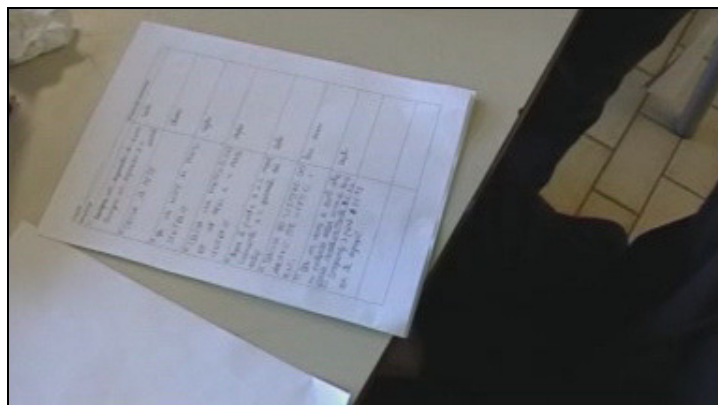
I docenti in formazione hanno deciso di far lavorare gli alunni con fogli a quadretti e senza strumenti geometrici, come la riga o la squadra.



Una coppia di alunni al lavoro, rispettando le regole date

Risultanze di maggior rilievo, simili a quelle ottenute con i docenti in formazione:

- È stato necessario spiegare meglio il significato di istruzione unitario.
- Alcuni allievi che hanno dato istruzioni hanno detto che è stato difficile trovare le parole giuste per strutturare alcune istruzioni, anche se sapevano chiaramente che cosa volevano che i loro compagni disegnassero.



Una lista di istruzioni

- Dopo alcune istruzioni, la maggior parte degli alunni ha completato con successo il disegno, (quasi) ignorando le rimanenti istruzioni: alcuni disegni

sono state corrette anche se le istruzioni sono state sbagliate (la cosa importante era di far bene, di vincere il gioco!).

- L'utilizzo di carta a quadretti ha reso più facili le attività di disegno.
- Alcune istruzioni sono state ambigue e, pertanto, ingannevoli.



Conseguenze di istruzioni ambigue...

Risultanze di maggior rilievo, diverse da quelle ottenute con i docenti in formazione:

- Fin dall'inizio della sessione, gli alunni si sono lamentati della difficoltà del registro linguistico usato dai docenti in formazione sia nella Guida che nella comunicazione orale.
- La maggior parte degli alunni ha fatto buon uso delle lettere per identificare gli estremi dei segmenti.
- Per la maggior parte degli alunni descrivere o definire una figura geometrica sono nozioni equivalenti.
- Gli alunni con risultati scolastici scarsi hanno tratto un grande beneficio da questo tipo di attività.
- La discussione finale in aula è iniziata con la presentazione a tutta la classe, da parte di ciascuna coppia, delle proprie attività.
- Lo scambio di ruoli all'interno delle coppie è stata un'attività aggiuntiva che gli alunni hanno voluto sperimentare con figure diverse.

Feedback per i docenti in formazione

Alla sessione di feedback, oltre ai due formatori ed a tutti i docenti in formazione, hanno preso parte due alunni.

I quattro docenti in formazione hanno presentato ai loro colleghi le sperimentazioni con gli alunni, facendo commenti ed osservazioni, e mostrando video-clips registrate nelle aule.



I docenti in formazione presentano ai colleghi le loro sperimentazioni

La maggior parte delle suddette risultanze delle sperimentazioni sono state presentate per una specifica discussione. Comunque, occorre dire che, mentre i due alunni sono stati attivi, i docenti in formazione che non avevano fatto la sperimentazione hanno partecipato alla discussione solo in modo occasionale.



Gli alunni discutono con i docenti in formazione

Ulteriori problematiche emerse dalla discussione:

- Trovare un modo appropriato per presentare e motivare gli obiettivi dell'attività.
- Individuare un appropriato contratto didattico fra insegnanti ed alunni per la realizzazione dell'attività.
- Gestire il tempo nella classe (la sperimentazione ha richiesto più tempo di quanto inizialmente programmato).
- Considerare la pre conoscenza di software per la geometria come possibile fonte di aiuto, specialmente per gli alunni a cui è chiesto di dare le istruzioni.
- Evidenziare la differenza fra il rigore del linguaggio matematico e la "flessibilità" del linguaggio naturale.
- Decidere come mostrare, in una scuola secondaria inferiore, il passaggio dalla descrizione di una figura geometrica alla sua definizione.

La seconda sperimentazione

di Lucia Doretti*

REALIZZAZIONE DELLA PROPOSTA

L'attività ha avuto lo scopo di far riflettere gli insegnanti in formazione sui differenti linguaggi, grafico e verbale, che intervengono nel discorso geometrico e ne determinano lo sviluppo proprio attraverso la loro interazione coordinata. Si è configurata come un'interessante occasione per sottolineare la necessità di promuovere nell'insegnamento della geometria l'uso di vari registri di rappresentazione e il loro coordinamento attraverso specifiche attività di conversione dall'uno all'altro.

Attività sviluppata nella sessione di formazione

Numero dei corsisti: 18

Durata complessiva: quattro ore (un'ora per il lavoro a coppie – tre ore per la discussione)

L'attività è stata impostata secondo le indicazioni della proposta sperimentata a Pisa.

I corsisti si sono suddivisi in coppie e all'interno di ciascuna coppia sono stati decisi i ruoli di ricevente e di fornitore di istruzioni. È stata poi distribuita ad ogni corsista la scheda-guida con le istruzioni da seguire ed il resto del materiale. Prima di iniziare l'attività è stato necessario chiarire con degli esempi il senso da dare all'espressione istruzione unitaria (semplice) contenuta nella scheda che doveva consentire il disegno della figura per passi successivi. Sui foglietti consegnati a chi forniva le istruzioni erano state scritte le parole *rombo*, *trapezio isoscele* o *cubo*. Alla fine della prima fase, dopo circa un'ora e mezzo dall'inizio della sessione di lavoro:

- ogni componente della coppia aveva compilato la propria scheda con le istruzioni date o ricevute, indicato per iscritto gli eventuali commenti e data una definizione della figura
- sono stati mostrati il foglietto con il nome della figura e il disegno realizzato.

La fase successiva è stata dedicata alla discussione collettiva del lavoro delle singole coppie.

Le prime dichiarazioni dei corsisti sono state quelle di riconoscere un'insospettata difficoltà in questo lavoro, nonostante la familiarità con le figure geometriche considerate. Tutti sono stati concordi nel ritenere più difficile il ruolo di *fornitore di istruzioni* rispetto a quello di *ricevente ed esecutore di istruzioni*: chi forniva le istruzioni doveva, infatti, far riferimento ad un'immagine richiamata nella propria mente dal nome della figura, interpretare percettivamente e cognitivamente tale immagine e formulare messaggi appropriati per la sua riproduzione. Alcuni hanno

* Dipartimento di Scienze Matematiche e Informatiche, Università di Siena, Italia.



dichiarato di non essere riusciti a completare l'elenco delle istruzioni (anche dopo più di un tentativo), altri hanno ammesso di avere dubbi su come le avevano formulate e di non essere sicuri che potessero essere state comprese dal collega. Sono stati poi esaminati e commentati alcuni elenchi di istruzioni forniti dai corsisti (riprodotti su lucido) e il modo con cui tali istruzioni erano state interpretate e tradotte graficamente da chi le aveva ricevute.

In Appendice C sono riportati alcuni dei lavori commentati nella sessione con gli insegnanti in formazione.

È stata questa l'occasione per riflettere con i corsisti sui due seguenti aspetti:

- il linguaggio matematico ed il suo ruolo nel processo di costruzione delle conoscenze;
- il ruolo delle definizioni in geometria.

A. *Il linguaggio matematico ed il suo ruolo nel processo di costruzione delle conoscenze*

Un uso appropriato del linguaggio presuppone la piena consapevolezza dei termini matematici introdotti e l'indicazione di istruzioni non ambigue, interpretabili da tutti nello stesso modo. In diversi casi, sono state date, invece, istruzioni che consentivano di disegnare figure con caratteristiche geometriche diverse da quelle che si voleva ottenere (ad esempio le seguenti istruzioni: *1. disegnare un segmento; 2. disegnare un altro segmento ad esso perpendicolare nel suo punto medio*, non permettono di individuare univocamente un rombo, come si sarebbe voluto).

La sensazione era che sul tema del linguaggio ci fosse molto da lavorare, anche se non tutti i corsisti percepivano appieno il problema.

C'è stato chi ha manifestato perplessità riguardo all'analisi critica effettuata sulle istruzioni date, ritenendo che *"anche se le istruzioni non sono proprie precise, chi le riceve è portato ad interpretarle bene e a completarle in modo corretto"*. In certi disegni, in effetti, si nota che le figure prodotte sono quelle volute, ma non quelle deducibili dalle istruzioni.

Si è rilevata quindi la tendenza, di fronte a messaggi lacunosi od errati, a colmare i vuoti di informazione sulla base del messaggio globale, utilizzando tutti i fenomeni della percezione e della regolarizzazione; in altri casi, la visualizzazione iniziale della figura, generata dalle prime informazioni, ha fatto sì che si continuasse nel disegno corretto della stessa, anche se le istruzioni non erano idonee¹.

La discussione ha portato anche a riflettere sulla differenza tra linguaggio naturale, caratterizzato da ricchezza e varietà di espressioni, e linguaggio matematico, in cui ogni termine ha un significato specifico che ne determina l'uso.

Si è infine osservato che, in diversi casi, nel dare le istruzioni si è introdotto un elemento "estraneo" alla figura: si sono, cioè, utilizzate informazioni che

¹ In un commento si legge *"Nonostante a volte le indicazioni non siano state molto precise, ho eseguito le indicazioni nella maniera più logica (o più scontata!), probabilmente per via delle conoscenze della geometria che abbiamo"*.



descrivono la figura pensata posizionata in modo standard rispetto al riferimento naturale costituito dai bordi del foglio, evidenziando così la presenza di stereotipi nelle rappresentazioni mentali di concetti e relazioni geometriche (si ritrovano, infatti, di frequente nelle istruzioni i termini “orizzontale” e “verticale”: “disegna un segmento orizzontale”, “disegna un segmento verticale che passi per il punto medio”...).

L’esperienza ha fatto comunque riflettere i corsisti sulla necessità di sviluppare nella prassi didattica attività specifiche rivolte all’apprendimento e all’uso del linguaggio matematico: anche se l’utilizzazione corretta del linguaggio richiede tempi lunghi di maturazione, essa è comunque uno strumento fondamentale per la costruzione delle conoscenze.

B. Il ruolo delle definizioni

Altro spunto di riflessione è stato suggerito dalla richiesta, presente sulla scheda di lavoro, di dare una definizione della figura descritta o disegnata. Tale richiesta è stata interpretata in modi diversi dai corsisti: c’è chi si è limitato ad indicare il nome della figura e chi invece ha elencato molte proprietà, spesso più di quelle che servivano a caratterizzarla.

Riportiamo, come esempio, alcune definizioni di rombo date dai corsisti che mettono in evidenza questo aspetto e che sono state analizzate nella sessione di lavoro:

- Rombo: “*Figura geometrica piana, caso particolare di parallelogramma in cui i lati opposti sono a due a due paralleli e gli angoli interni sono uguali a due a due e le cui diagonali perpendicolari non hanno la stessa lunghezza*”.
- Rombo: “*Quadrilatero avente tutti i lati uguali e gli angoli opposti uguali*”.
- Rombo: “*Parallelogramma con diagonali perpendicolari e non uguali*”.
- Rombo: “*Quadrilatero con quattro lati uguali, paralleli a due a due*”.

Si è riflettuto sul significato di definizione in matematica e sulla differenza tra proprietà che *descrivono* una figura e proprietà che la *definiscono*. In particolare, si è discusso su come “minimizzare” le proprietà enunciate nel caso del rombo in modo da individuare quelle necessarie e sufficienti, di volta in volta, a caratterizzarlo. Si è constatato che l’individuazione delle proprietà necessarie e sufficienti rappresenta un momento fondamentale nella costruzione delle definizioni, ma sicuramente costituisce un passaggio delicato e difficile per gli allievi. Da qui la necessità di affrontare con essi percorsi operativi per la costruzione di definizioni che facciano, ad esempio, uso di materiali opportunamente progettati² e/o del software Cabri (la modalità di costruzione di una figura con Cabri evidenzia quali proprietà necessarie e sufficienti sono state considerate e quindi quale definizione è sottintesa).

² Per es. “modelli dinamici” la cui manipolazione, analisi e descrizione permette di raccogliere gli “elementi” per costruire definizioni di figure con riferimento a proprietà diverse.

Si è osservato come la questione della definizione si intreccia in modo stretto con quella della classificazione: le proprietà espresse dalla definizione devono consentire di includere in una certa classe solo gli “oggetti” che le possiedono. Si è anche notato come le definizioni date dagli stessi corsisti portano più frequentemente a “classificare per partizione” (richiedere che *un rombo sia un parallelogramma con diagonali perpendicolari e non uguali* implica escludere i quadrati dall’insieme dei rombi). E’ stata questa l’occasione per far osservare che lo stesso Euclide negli “Elementi” definisce per partizione: ad es. le definizioni che egli dà dei quadrilateri avevano lo scopo di determinare una partizione nell’insieme di tali figure. La scelta che si fa oggi privilegia definizioni che danno luogo a relazioni di tipo inclusivo, che permettono di confrontare le figure geometriche mettendo in evidenza analogie e differenze. Se si presenta la necessità di distinguere tra concetti (ad es. quadrilateri concavi e convessi), è necessario però ricorrere a definizioni per partizione. Si è discusso sul fatto che la classificazione per inclusione, sebbene più complessa, facilita la sistemazione deduttiva delle conoscenze (i concetti particolari sono un sottoinsieme di quelli più generali), risulta più economica rispetto alla classificazione per partizione e consente di dare di ciascun oggetto geometrico più definizioni alternative (*un quadrato è un rombo con le diagonali uguali o un rettangolo che ha tutti i lati uguali*).

Nella prassi didattica, ciò che è essenziale è comunque non anticipare le definizioni rispetto alla costruzione dell’ambiente da cui prendono significato.

Attività sviluppata nelle classi

Numero dei corsisti: 2

Durata complessiva dell’attività in ciascuna classe: due ore (un’ora per la presentazione e lo svolgimento dell’attività – un’ora per la discussione)

Le attività sono state riproposte da due corsisti nelle classi in cui svolgevano il loro tirocinio, rispettivamente, in una classe di I media (18 allievi di 11-12 anni) e in una classe III media (18 allievi di 13-14 anni), ed in due classi II media (con 20 allievi e 17 allievi di 12-13 anni). Ogni volta era presente l’insegnante di classe.

I due corsisti hanno presentato agli allievi l’attività motivandola come un gioco a coppie, denominato “Alla scoperta di figure geometriche”, in cui uno dei due componenti dava un elenco di “indizi” che dovevano portare l’altro all’”identificazione” della figura. Il lavoro degli allievi è stato strutturato in modo analogo a quello svolto nella sessione di formazione. E’ stato necessario dedicare più tempo del previsto per far comprendere agli allievi come dovevano dare le istruzioni (nonostante questo si sono poi trovate formulazioni non appropriate nelle produzioni scritte). Le figure scelte sono state *rombo, trapezio, triangolo isoscele e cubo*.

In più di una classe, gli allievi delle varie coppie hanno voluto sperimentare e confrontarsi con entrambi i ruoli. In una delle classi, lo sperimentatore ha proposto una variante dell’attività per evitare che nelle coppie ci si potesse aiutare con lo scambio di informazioni non dovute. Le modalità di lavoro sono state le seguenti: ha dato ad entrambi gli allievi di ogni coppia un foglietto con scritto il nome, da tenere

segreto, di una figura (i nomi delle figure nei due foglietti erano diversi); ciascuno allievo doveva scrivere un elenco di istruzioni in modo da consentire al compagno di disegnare la figura; successivamente i foglietti delle istruzioni venivano scambiati e ogni allievo leggeva, commentava per iscritto le istruzioni ricevute se non erano chiare e disegnava la figura; alla fine ciascuno dava indietro al compagno le istruzioni con i commenti e la figura disegnata.

Al termine dell'attività ogni coppia ha discusso il proprio lavoro con i compagni di classe e con l'insegnante sperimentatore.

Discussione collettiva di feedback

Numero dei corsisti: 18

Durata complessiva: due ore

Coloro che sono andati nelle classi hanno raccontato la loro esperienza.

Un primo fatto segnalato è stata la sorpresa riscontrata negli allievi di fronte all'attività proposta, giudicata insolita, per la quale si sentivano impreparati e avevano il timore di essere valutati negativamente dall'insegnante. Solo la rassicurazione che si trattava di un gioco che aveva lo scopo di aiutarli nello studio della geometria li ha reso più tranquilli e liberi di esprimersi.

Diverse coppie, soprattutto in una II media, si sono però lasciate condizionare dalla necessità di “dover” fornire il disegno corretto della figura, che alla fine è “apparsa”, nonostante l'incompatibilità con le istruzioni scritte sul foglio (segno evidente di scambi illeciti di informazioni). Questa è stata la ragione che ha spinto il corsista sperimentatore, quando ha proposto l'attività nell'altra classe II, ad introdurre la variante che prevedeva per gli allievi della coppia di svolgere lo stesso ruolo contemporaneamente, ma su figure diverse. I risultati ottenuti sono stati, come da previsione, più significativi ed hanno mostrato in generale una buona corrispondenza tra l'insieme delle istruzioni e la figura disegnata.

È stato rilevato, come già era successo nella sessione di formazione, che anche gli allievi hanno valutato più difficile il compito di dare le istruzioni e hanno ammesso di avere avuto dubbi sul modo con cui si erano espressi; chi ha ricevuto le istruzioni ha ammesso di essersi trovato spesso in difficoltà e, qualche volta, anche di aver fatto il disegno, interpretando le istruzioni in modo personale (“*Se non avessi capito cosa era, non sarei arrivato a disegnare la figura: qualche dato era un po' sballato*”).

Sono stati esaminati alcuni dei lavori prodotti dagli allievi che hanno mostrato diversi gradi di appropriazione nell'uso del linguaggio geometrico e, in certi casi, una netto scollamento tra ciò che si voleva descrivere e il modo di farlo. Un altro aspetto rilevato è stata la difficoltà a dare significato all'espressione “dai una definizione della figura disegnata” che per molti ha voluto dire riconoscerla e scriverne il nome e per altri elencarne alcune delle proprietà.



Commenti

L'attività proposta ha fatto riflettere i futuri insegnanti su vari aspetti.

- La difficoltà di usare correttamente il linguaggio matematico: le incertezze, i dubbi e gli errori mostrati nel fornire le istruzioni esprimono l'esigenza di favorire, nella pratica didattica, il processo di verbalizzazione che induce non solo ad esplicitare le proprie idee, ma anche a cercare di farlo in modo chiaro e corretto per farsi comprendere.
- La necessità dell'utilizzazione appropriata dello strumento linguistico che, nonostante richieda tempi lunghi di maturazione, è fondamentale per la costruzione delle conoscenze.
- La necessità di sviluppare attività di questo genere perché offrono molte informazioni sullo stato delle conoscenze degli allievi, sul livello di concettualizzazione raggiunto, sulle lacune presenti, sui misconcetti costruiti. Tali informazioni sono indispensabili per poter poi intervenire in classe con opportune e mirate azioni didattiche.
- La necessità, più in generale, di sviluppare il discorso geometrico attraverso l'interazione coordinata di diversi registri (verbale, grafico e simbolico) e il riconoscimento del ruolo importante svolto dalla percezione e dalla visualizzazione.

Un corsista ha scritto questo commento:

Personalmente credo che l'attività che abbiamo svolto sia stata molto interessante in quanto non è facile, nemmeno per chi ha una conoscenza ormai piuttosto approfondita della materia, saper convertire il linguaggio parlato in linguaggio grafico e viceversa. Detto ciò, penso che la stessa attività svolta in una classe della scuola media possa suscitare interesse e curiosità sia dal punto di vista dell'insegnante che da quello degli alunni.

La terza sperimentazione (allo IUFM di Parigi) e conclusioni

di Franco Favilli

LA TERZA SPERIMENTAZIONE

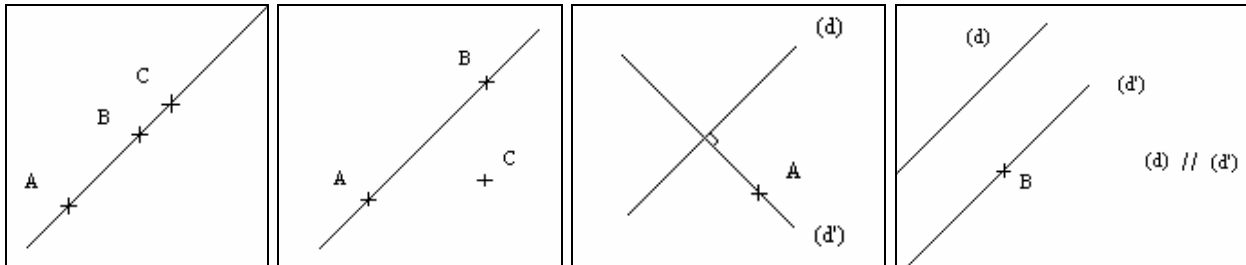
La proposta è stata sperimentata, in maniera leggermente diversa, allo IUFM di Parigi da Catherine Taveau (insegnante della classe: Cynthia Dobin). La classe è composta di 28 alunni, di 11-12 anni, al primo anno di scuola secondaria.

Poiché i due obiettivi principali dell'insegnante sono gli stessi delle due precedenti sperimentazioni – rinforzare la conoscenza, da parte degli alunni, del linguaggio della geometria e di rendere agevoli il passaggio dall'apparenza di una figura alle sue

proprietà (cioè, da ciò che può essere visto a ciò che può essere saputo) – la proposta è stata attuata in due sessioni.

Prima sessione

Gli alunni che ricevevano le istruzioni hanno dovuto disegnare la figura solo a mano, senza strumenti geometrici.

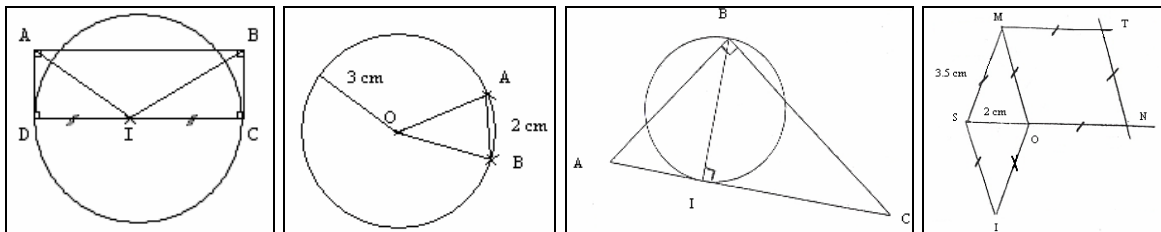


Disegni di rette

Commenti – Molti alunni hanno cercato di scrivere le istruzioni per permettere di disegnare esattamente la stessa figura (compreso, per esempio, le misure) e, in molti casi, le istruzioni non sono state abbastanza precise, ma questo non ha impedito a chi ha ricevuto le istruzioni di disegnare la figura in maniera corretta.

Seconda sessione

Questa sessione ha avuto luogo un mese dopo. L'insegnante ha dato agli alunni un mini glossario ed ha chiesto a coloro che ricevevano le istruzioni di disegnare le figure in maniera precisa (con gli strumenti).



Disegni di "cerchi"

Commenti – Le istruzioni per le prime tre figure sono state in gran parte corrette, eccetto che per l'ultima. L'insegnante ha deciso di estendere le sessioni con un'attività al computer, usando Cabri Géomètre.

L'insegnante è stata molto interessata a questo lavoro e si è convinta delle difficoltà, per alunni di questa età, ad usare un linguaggio geometrico preciso. Ma è diventato evidente per lei il fatto che tali compiti (inclusi quelli con Cabri) sono dei buoni metodi per far capire agli alunni la differenza fra la descrizione e la definizione di una figura.

CONCLUSIONI

Per rendere gli alunni meglio consapevoli della differenza il descrivere ed il definire una figura e portarli verso il concetto di definizione di una figura, nella prima sperimentazione nell'Università di Pisa, è stato deciso dai docenti in formazione che sono andati nelle scuole:



- prima, di chiedere agli alunni di fare un elenco di tutte le proprietà che possono “vedere” in una data figura;
- poi, di considerare ciascuna di queste proprietà e confrontarla con le altre;
- infine, di cancellare la proprietà dall’elenco se pensano che essa sia una conseguenza di una delle altre.

In questo modo gli alunni si sono convinti che le proprietà “sopravvissute” rappresentano una descrizione migliore, più raffinata e breve della figura: qualcosa equivalente o molto vicino a ciò che il loro insegnante chiama la sua “definizione”. La discussione nell’intera classe degli elenchi preparati dai differenti gruppi di alunni, in particolare le spiegazioni fornite per motivare le cancellazioni, hanno contribuito grandemente a rendere sia attraente che efficace l’introduzione di uno degli argomenti matematici più complessi e delicati.

È importante dire che le tre sperimentazioni hanno dimostrato come sia rilevante per gli allievi (docenti in formazione ed alunni) non solo conoscere a fondo il linguaggio della geometria, ma anche essere capaci di organizzare ed esprimere un processo algoritmico (l’insieme delle istruzioni)³ per ottenere il prodotto desiderato (il disegno) da un altro allievo che ci si aspetta debba solo eseguire le istruzioni. Comunque, la difficoltà (od impossibilità) già menzionata per gli allievi di semplicemente eseguire le istruzioni date, ed il fatto che la loro pre conoscenza della figura li ha spinti spesso a fare disegni corretti, indipendentemente dalle istruzioni ricevute, mostra come sia importante introdurre l’attività evidenziando l’importanza di rispettare completamente le istruzioni ricevute, nel modo in cui sono date ed interpretate. Per gli allievi, specialmente per gli alunni, il desiderio di far bene o, anche, di “vincere” è troppo forte per resistere a qualsiasi regola!

Riguardo allo squilibrio che si potrebbe vedere nei compiti assegnati alla coppia (chi dà le istruzioni e chi le riceve), si suggerisce fortemente di replicare l’attività usando una figura differente e scambiando i ruoli nella coppia, come è successo nelle prime due sperimentazioni.

LETTURE CONSIGLIATE

Ellerton, N.F. and Clarkson, P.C. (1996). Language Factors in Mathematics Teaching and Learning, in Bishop A.J. et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 987-1033). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Favilli, F., Japelt, A. and Novotná, J. (2005). Developing good practices for teacher training focused on understanding classroom environment, in Novotná J. (ed.), *Proceedings of SEMT '05 – International Symposium Elementary Maths Teaching* (pp. 335-336). Charles University, Prague.

Favilli, F. and Villani, V. (1993). Disegno e definizione del cubo: un’esperienza didattica in Somalia. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 16, n.10, 907-925.

³ Questa capacità non può essere data per scontata neanche fra formatori e/o didattici della Matematica, come è stato chiaramente mostrato dal workshop su questa proposta che è stato organizzato come parte delle attività scientifiche del Congresso SEMT '05 a Praga.



Maier, H. (1995). Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi. *La matematica e la sua didattica*, 3, 298-235.

UMI-CIIM (2001). *Matematica 2001, Materiali per il XXVII Convegno Nazionale sull'Insegnamento della matematica*. Lucca: Liceo Scientifico "A. Vallisneri".

Allegato A1: *Puzzle geometrici* – Guida per l'allievo

Materiali per l'attività: possibile usare solo un foglio di carta, una penna ed il modulo da riempire.

- ✓ Gli alunni lavorano a coppie. Ciascun alunno nella coppia ha un ruolo specifico: un alunno (**chi dà istruzioni**) dà istruzioni e l'altro (**chi fa il disegno**) abbozza un disegno, seguendo le istruzioni ricevute.

CHI DÀ ISTRUZIONI

Stai per ricevere un foglietto con il nome di una figura geometrica, piana o solida, che non può essere mostrato o detto a nessuno.

Il tuo obiettivo è consentire al tuo compagno di disegnare una data figura, passo dopo passo, tramite una serie di istruzioni.

1. Se vuoi, puoi disegnare la figura prima o durante il gioco;
2. Puoi dare solo istruzioni unitarie, cioè ciascuna istruzione dovrebbe permettere al tuo compagno di disegnare solo una parte della figura geometrica. Spieghiamolo con un esempio non matematico: se nel foglietto ci fosse scritto *tavola apparecchiata*, le prime istruzioni unitarie (e quindi consentite) potrebbero essere:

Stendi la tovaglia – metti un coltello – metti una forchetta – ...

Mentre nessuna delle seguenti istruzioni sarebbe consentita:

prepara la tovaglia per il pranzo – la usiamo ogni giorno per i pasti.

3. Dando le istruzioni puoi usare alcuni termini matematici come *segmento asse*, *angolo*, *ecc.* ma non puoi usare nomi di poligoni (triangolo, quadrato, ecc.),

CHI FA IL DISEGNO

Il tuo compagno sta per ricevere un foglietto con il nome di una figura geometrica, piana o solida. Ti chiederà di disegnare questa figura tramite una serie di istruzioni.

Il tuo obiettivo è disegnare la data figura passo dopo passo.

1. Scrivi ogni istruzione che ti viene data dal compagno sullo speciale modulo che hai ricevuto, con i tuoi commenti, se ci sono
2. Se una istruzione non è chiara, puoi chiedere a chi dà le istruzioni di ripeterla, ma non di spiegarla.
3. Se l'istruzione rimane non chiara, puoi scriverla e fare i tuoi commenti sullo speciale modulo.
4. Esegui l'istruzione e dillo a chi dà le istruzioni quando sei pronto/a.
5. Non dovresti fare correzioni al disegno. Se ti accorgi che hai sbagliato, scrivilo sul modulo.
6. Quando l'ultima istruzione è stata eseguita, dovresti scrivere il nome, una descrizione e la definizione della figura data.
7. Il disegno finale può essere mostrato a chi dà le istruzioni ed a tutta la classe quando tutte le coppie hanno terminato.



formule geometriche e nomi di oggetti che ricordano la figura geometrica da disegnare (per esempio, se la figura è un cerchio, non puoi dire “*Disegna una ruota*”).

4. Scrivi ogni istruzione sullo speciale modulo che hai ricevuto, con i tuoi commenti, se ci sono.
5. Se chi fa il disegno ti chiede di ripetere l'istruzione, lo puoi fare solo usando le stesse parole.
6. Puoi dare la successiva istruzione solo quando chi fa il disegno ha eseguito quella precedente.
7. Quando l'ultima istruzione è stata data ed eseguita, dovresti scrivere una descrizione ed una definizione della figura data.

Allegato A2: *Puzzle geometrici* – Scheda delle istruzioni

Pair: _____

Istruzioni	Commenti
1)	
2)	
...	

Nome della figura: _____

Descrizione della figura: _____

Definizione della figura: _____

Allegato B: *Puzzle geometrici* – Guida per l'insegnante

L'obiettivo di questa guida è di aiutare gli insegnanti ad adattare l'attività di insegnamento alle competenze della classe dove sarà svolta. Poiché l'attività è indirizzata ad alunni di scuola secondaria inferiore, dobbiamo considerare che a questa età (11 – 14 anni) la mente degli alunni si sta appena aprendo all'astrazione. Passare dal concreto all'astratto è caratteristico di questa età.

Obiettivi

L'attività mira da un lato a rafforzare la capacità dell'allievo ad usare il linguaggio della geometria e dall'altro a sviluppare la capacità dell'insegnante di costruire concetti geometrici nella mente dell'alunno, senza essere troppo vincolato dalle definizioni.

Prerequisiti necessari

L'attività richiede che gli alunni conoscano alcuni concetti geometrici di base, come segmento, angolo, segmenti perpendicolari e paralleli.

Materiali didattici supplementari

Il geo-piano è uno strumento utile per l'attività in quanto può rappresentare un'immagine reale di un contesto spaziale. Inoltre, non impedisce il libero pensare dell'alunno.

Descrizione ed osservazioni

1. L'attività didattica viene presentata agli alunni come un gioco, diminuendo in tal modo la loro ansietà rispetto ad una possibile valutazione e permettendo loro di vivere l'esperienza educativa senza alcun stress ed in maniera attiva. L'attività dovrebbe essere introdotta come in *gioco di ruolo*. Ci sono due ruoli, abbastanza diversi:

- l'alunno che dà le istruzioni; (*chi dà istruzioni*);
- l'alunno che riceve le istruzioni (*chi disegna*).

Chi dà istruzioni riceve un foglietto con il nome di una figura geometrica e si richiede che guidi chi disegna a disegnarla.

2. Il *linguaggio* dovrebbe essere idoneo all'età degli alunni. Pertanto l'insegnante non dovrebbe usare la forma imperativa, che è autoritaria e ricorda il linguaggio frequentemente usato nei libri di testo (ad es. *calcolate le seguenti espressioni, risolvetes il seguente problema*), ma dovrebbe piuttosto usare la prima persona plurale. Comunque, se necessario, l'imperativo potrebbe essere smorzato dall'uso della forma interrogativa accompagnata dal verbo *potere*.

3. Per questo tipo di attività le coppie non è necessario che siano omogenee in termini di capacità, perché l'obiettivo è la *comunicazione*, sia attiva che passiva, fra gli alunni. Comunque, l'insegnante potrebbe formare almeno una coppia omogenea. Nella prima fase dell'attività il lavoro a coppie è importante per facilitare la socializzazione.

4. Per quanto riguarda la *figura geometrica* da disegnare, la scelta potrebbe essere fra una figura che gli alunni hanno già studiato ed una nuova. La pre-conoscenza della figura geometrica da un lato potrebbe rafforzare la conoscenza da parte dell'alunno delle sue proprietà e rendere più facile la comunicazione nella coppia, dall'altro potrebbe attivare negli alunni schemi mentali pre-organizzati. Per esempio, l'alunno nella coppia che riceve le istruzioni potrebbe, ad un certo punto, continuare il disegno solo perché comprende quale figura deve disegnare e non per le istruzioni che sta ricevendo dal suo compagno. Qualcosa di simile potrebbe accadere all'alunno che dà le istruzioni, perché potrebbe difficilmente capire le differenti interpretazioni delle sue istruzioni: per esempio, nell'istruzione *disegna due lati paralleli* non è chiaro:

- a) se i lati siano congruenti oppure no;
- b) quale sia la distanza fra i lati;
- c) se i lati abbiano un estremo su una retta perpendicolare comune oppure no.

Molto probabilmente, l'alunno che riceve questa istruzione disegnerà due lati paralleli di un quadrato.



Se si usa una figura sconosciuta agli alunni, invece, potrebbero essere più attenti nel modo di dare le istruzioni, così come nel modo di eseguirle, perché non hanno ancora alcun schema mentale collegato ad essa. Comunque, in questo caso, l'attività potrebbe probabilmente essere più difficile per gli alunni.

5. L'uso di fogli a quadretti può rendere più facile il compito di entrambi gli alunni della coppia (quello che dà e quello che riceve istruzioni). Comunque, questo potrebbe rappresentare un limite perché potrebbe suggerire agli alunni dei percorsi preferenziali (per esempio, l'istruzione *Disegna un segmento obliquo* potrebbe essere seguito dal disegno di un segmento con una inclinazione di 45° , a causa dei quadretti nel foglio).

Nel caso l'insegnante decida di usare un foglio bianco, sarebbe utile consentire agli alunni di usare sia la riga che la squadra.

Anche l'alunno che dà le istruzioni dovrebbe ricevere un foglio di carta dove poter anche lui disegnare la figura, per un supporto visivo. Infatti, a questa età (11-14 anni), i ragazzi hanno scarse capacità di astrazione ed il disegno della figura in base alle loro proprie istruzioni potrebbe semplificare il loro controllo della procedura.

6. Poiché l'attività è basata sulla comunicazione fra alunni in ciascuna copia, l'insegnante dovrebbe focalizzare l'attenzione degli alunni sul fatto che sono permesse solo istruzioni singole. La nozione di istruzione singola o unitaria potrebbe risultare alquanto controversa: sta all'insegnante fare una scelta e spiegarla agli alunni. Per esempio, per far disegnare le diagonali di un rombo, potrebbero essere date due differenti sequenze di istruzioni:

- disegna un segmento AB – chiama M il suo punto medio – disegna un segmento MC perpendicolare ad AB – disegna il segmento MD congruente ed adiacente a MC* (una sequenza di quattro istruzioni unitarie).
- disegna due segmenti perpendicolari che si intersecano nei loro punti medi* (solo una istruzione non unitaria).

Nella scheda dell'attività data agli alunni, potrebbe essere utile fornire un esempio di istruzione unitaria tratto da un contesto non matematico ma della vita quotidiana, allo scopo di farli sentire liberi nello svolgimento dell'attività.

7. Alla fine dell'attività agli alunni viene chiesto di:
- scrivere il nome della figura che hanno disegnato;
 - descriverla*;
 - definirla*.

Questa ultima fase dell'attività è utile per la costruzione, da parte dell'alunno, del concetto della figura geometrica data, attraverso una serie di passaggi che precedono la definizione. Inoltre, a seconda del contesto della classe, l'insegnante dovrebbe decidere se chiedere la definizione della figura geometrica o meno.

8. La *discussione finale* nella classe è una fase importante dell'attività perché permette all'insegnante ed all'intera classe di osservare i disegni finali, confrontare le sequenze di istruzioni ed il disegno fatto in ciascuna coppia, ascoltare e discutere idee differenti riguardo alla figura data. Per questo potrebbero essere adottate le seguenti strategie:

- inizialmente, una coppia dovrebbe presentare la sua attività ai compagni, che sono invitati a porre domande e fare commenti, creando così le condizioni per una vera discussione fra pari;
- successivamente, si potrebbe suggerire un cambio nella composizione delle coppie, in maniera che, per esempio, colui che dà le istruzioni in una coppia lavori con colui che disegna in un'altra coppia. Questa strategia dovrebbe far capire agli alunni l'importanza in matematica dell'utilizzo di un linguaggio ed una terminologia univoci.



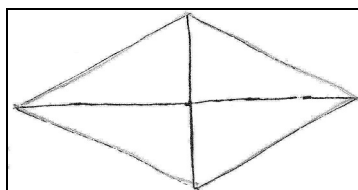
9. *Cambiamenti* nell'attività

- Fornire a tutti gli alunni di una classe lo stesso insieme di istruzioni per il disegno di una data figura geometrica. Alcune di queste istruzioni potrebbe essere date in modo ambiguo, così da permettere un'analisi della reazione degli alunni alle differenti interpretazioni.
- Chiedere agli alunni di lavorare sul disegno di una figura geometrica non standard.
- Formare diversi gruppi nella classe. Ciascun gruppo sceglie una figura geometrica e prepara una sequenza di istruzioni unitarie per disegnarla. Ciascun gruppo chiede all'insegnante di essere il proprio *disegnatore* e di disegnare la figura scelta.
- Formare diversi gruppi nella classe. Ciascun gruppo dà ad un altro gruppo una sequenza di istruzioni per il disegno di una figura geometrica, e viceversa.

Allegato C: *Puzzle geometrici* – Due lavori dei corsisti

Esempio 1: Costruzione di un rombo

Elenco istruzioni	Commenti di chi riceve istruzioni
1. Disegna un segmento orizzontale	
2. Prendi il punto medio di tale segmento	
3. Disegna un segmento che passi per tale punto medio	
4. I punti del segmento devono essere equidistanti dagli estremi del segmento	<i>“Non si capisce a quali segmenti si riferisce”</i>
5. I due segmenti non devono avere la stessa lunghezza	
6. Unisci gli estremi dei due segmenti	



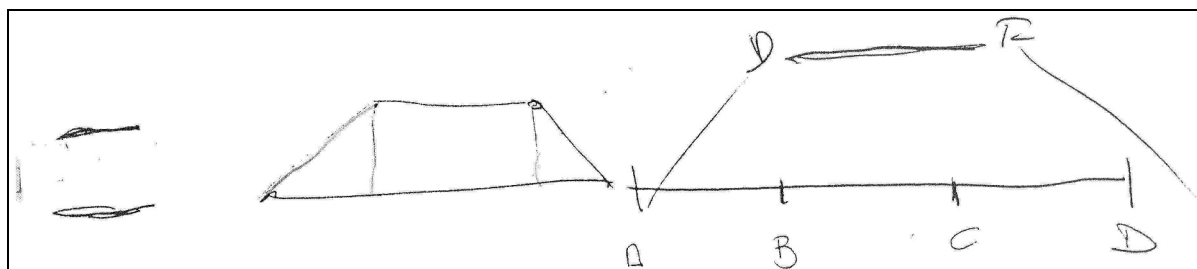
Disegno del rombo ottenuto dalle precedenti istruzioni

Definizione della figura (da parte di chi riceve istruzioni) - “Rombo: parallelogramma con diagonali perpendicolari e non uguali”.

Definizione della figura (da parte di chi fornisce le istruzioni) - “Rombo: figura geometrica piana esplicabile come caso particolare di un parallelogramma in cui i lati opposti sono a due a due paralleli e gli angoli interni sono uguali a due a due e le cui diagonali perpendicolari non hanno la stessa lunghezza”.

Esempio 2: Costruzione di un trapezio isoscele

Elenco istruzioni	Commenti di chi dà istruzioni	Commenti di chi riceve istruzioni
1. Disegna un segmento orizzontale		
2. Dividi il segmento orizzontale in tre parti uguali		
3. Dai un nome ai quattro punti individuati sul segmento in ordine A, B, C, D		<i>“Non ci è stato detto partendo da sinistra”</i>
4. Traccia un segmento parallelo a BC	<i>“Non sono stata chiara? Ho saltato un passaggio: traccia la perpendicolare ad AB per il punto B e la perpendicolare a CD per il punto C”</i>	<i>“Lo posso disegnare da tutte le parti ma scelgo di disegnarlo sopra a BC e di uguale misura”</i>
5. Chiama il segmento EF		
6. Unisci A con E		
7. Unisci D con F		



Disegno del trapezio isoscele ottenuto dalle precedenti istruzioni

Definizione della figura: La figura è un trapezio isoscele, cioè un quadrilatero con due lati paralleli di diverse misure e due lati uguali. Gli angoli interni opposti sono supplementari.