

GEOMETRICKÉ HLAVOLAMY

Franco Favilli* a Carlo Romanelli**

ÚVOD

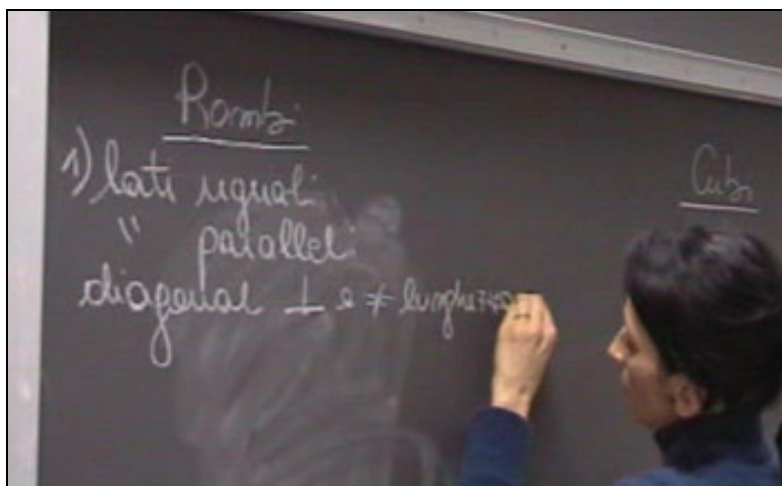
Geometrická rozprava si vyžaduje dobré znalosti a ovládanie terminológie a pojmov. Na druhej strane, vstrebávaníu geometrických pojmov učiacim sa je napomáhané, keď je komunikácia podporovaná použitím grafického jazyka, prirodzeného jazyka a geometrického jazyka, ktoré sú v rovnováhe.

V navrhovanej aktivite sú učiaci sa požiadaní pracovať vo dvojiciach, jeden z nich poskytuje druhému postupnosť inštrukcií pre narysovanie geometrického útvaru. Obaja učiaci sa sú potom požiadaní opísať útvar a definovať ho.

Táto geometrická vyučovacia aktivita môže reprezentovať zaujímavú príležitosť podčiarknuť potrebu podporiť rôzne registre reprezentácie a ich koordináciu prostredníctvom špecifických úloh zameraných na konverziu jednej na druhú.

Prostredníctvom tohto didaktického plánu si môžu aj budúci učitelia priamou cestou uvedomiť ako zložitý a náročný je prechod od opisu geometrického útvaru k jeho definovaniu pre tých, ktorí sa učia.

Tento návrh bol pripravený a pilotovaný na univerzite v Pise. Bol tiež súčasne pilotovaný na univerzite v Siene a neskôr na I.U.F.M. v Paríži.



* Centro di Ateneo di Formazione e Ricerca Educativa – CAFRE, Università di Pisa, Taliansko.

** Istituto Comprensivo “E. Pea”, Seravezza (LU), Taliansko.

Hlavná pilotáž

Franco Favilli a Carlo Romanelli

NÁVRH

Návrh *Geometrické hlavalamy* zdá sa korešponduje s dobrým spôsobom pracovania s matematickými pojmami, uvádzajúc ich pekne cez zmes teoretických a praktických aktivít. Rozširiac a prehĺbiac túto myšlienku môže ľahko viesť diskusiu ďaleko nad rámec štandardného obsahu matematického kurikula na druhom stupni základnej školy. Pilotovanie si preto vyžaduje v prvom rade definíciu špecifických didaktických cieľov a selekciu iba niekoľkých z možných matematických pojmov pre úvod alebo pre ďalšie použitie (v prípade, že ich žiaci už poznajú).

Na začiatku hodiny učiaci sa dostanú hárok papiera (tzv. *Manuál učiacich*) s určitým vysvetlením týkajúcim sa obsahu a pravidiel didaktickej aktivity. Základné pravidlá sú:

- Učiaci sa pracujú po dvoch.
- Člen každej dvojice dostane kúsok papiera s menom (rovinného alebo priestorového) geometrického útvaru a toto musí byť udržané v tajnosti pred jeho partnerom až do konca aktivity.
- Prvý učiaci sa poskytuje druhému postupnosť inštrukcií pre narysovanie útvaru.
- Iba *jednoduché* inštrukcie korešpondujúce s jednou grafickou aktivitou partnera sú dovolené. Napríklad, inštrukcia "Narysuj úsečku" je dovolená, inštrukcia "Narysuj os úsečky AB" nie je dovolená, pretože si vyžaduje najprv určenie stredu M úsečky AB a následne kolmicu na AB v bode M.
- Každá daná/získaná inštrukcia je napísaná na hárok papiera oboma učiacimi sa.
- Ak je to nevyhnutné, inštrukcia môže byť zopakovaná, ale nikdy nie modifikovaná alebo vysvetľovaná.
- Pre rysovania žiaci používajú hárky štvorcového papiera a pero (žiadna ceruzka, pravítko, kružidlá, atď.). Žiadne zmazania nie sú povolené.
- Počas rysovania sa nákres nesmie ukazovať.
- Keď postupnosť inštrukcií skončí, konečný nákres je ukázaný a porovnaný s menom daného geometrického útvaru.
- Obaja učiaci sa sú požiadaní zadať meno, opis a napokon definíciu geometrického útvaru.
- Diskusia v celej triede zakorenená v konečnom nákrese a daných príkazoch zakončuje aktivitu.

Rovnaká schéma by mala byť použitá aj učiteľmi s budúcimi učiteľmi aj budúcimi učiteľmi so žiakmi v škole.

Plán pilotovania bol v nasledovnej schéme navrhnutý a rozvinutý v Pise, hodiny udávajú trvanie každého kroku:

| K r o k y | | | | | | | | |
|-------------------------------|---|--|--|--|---|---|--|---|
| <i>Cvičný učiteľ</i> (10h) | <i>Cviční učitelia a študenti</i> (4h) | <i>Učítelia</i> (2h) | <i>Študenti a žiaci</i> (2h) Úvod. Práca v skupinách. Diskusia | | <i>Učítelia</i> (2h) | <i>Študenti a učitelia</i> (4h) Správa Diskusia | | |
| Príprava didaktických návrhov | Úvod. Práca v Skupinách. Diskusia | | | | | <i>Učítelia</i> (4h) | <i>Učítelia</i> (5h) Záverečná správa | |
| Objekty | M e t o d o l ó g i a o b s a h u | | | | | | | |
| <i>Krátke obdobie</i> | Vedomosti kompetencie | <i>Premýšľanie je ukončené – vyučovanie beží</i> | <i>Študenti</i> vedomosti | <i>Žiaci</i> vedomosti kompetencie | <i>Premýšľanie je ukončené – Poznámky</i> | <i>Učítelia</i> Socializácia Metodológia | Študenti Metodológia | <i>Premýšľanie je ukončené – Poznámky – Finalizácia plánu hodiny – Správa pre učiteľa</i> |
| <i>Dlhé obdobie</i> | Metodológia Socializácia | | Metodológia | Socializácia | | | | |

Všeobecné informácie

Počet učiteľov: 2 (autoři textu)

Počet budúcich učiteľov: 42

Počet tried zúčastnených pilotovania: 2 (2. a 3. trieda druhého stupňa základnej školy)

Počet a vek žiakov: 24 žiakov 12-ročných (2. trieda) a 22 žiakov 13-ročných (3. trieda)

Počet dospelých v každej triede počas hodín: 2 budúci učitelia (prítomní po prvý raz v týchto triedach) a učiteľ

Ciele

Vzdelávacie ciele návrhu môžu byť zhruba rozdelené na všeobecné a matematické ciele.

Za všeobecné ciele môžeme považovať:

- Rozvoj informovanosti a kritických prístupov smerom k použitiu jazyka a jeho interpretácii.
- Uvedomenie si ako dôležité je použiť špecifický a (jednoznačný) nedvojzmyselný jazyk.
- Nárast schopnosti učiaceho sa porozumieť a rozpracovať ústne inštrukcie.
- Stimulácia "kritického" počúvania inštrukcií.



- Zlepšenie schopnosti čítania, porozumenia, rešpektovania a aplikovania pravidiel didaktickej aktivity.
- Osvojenie si pojmu jednoduchých inštrukcií.
- Schopnosť rešpektovať tempo spolužiakov.
- Schopnosť pomenovať príčiny pre voľby, ktoré boli urobené a použité počas aktivity.

Za *matematické ciele* môžeme považovať:

- Zlepšené používanie matematického jazyka.
- Posilnenie znalosti geometrického jazyka.
- Zlepšenie techník rysovania.
- Upevnenie si geometrických vedomostí.
- Schopnosť vizualizovať trojrozmerné objekty z ich dvojrozmerných reprezentácií a reprezentovať telesá v rovine.
- Schopnosť opísania základných rovinných a priestorových geometrických útvarov vymedzením vlastností, ktoré sú nutné a postačujúce na ich definovanie.
- Rozvoj schopnosti nájsť správnu rovnováhu medzi opisom a definíciou rovinného alebo priestorového geometrického útvaru.
- Uvedomenie si významu definície v geometrii.
- Schopnosť porovnať a ohodnotiť rôzne druhy vstupu z debaty v kontexte správnej konštrukcie pojmov geometrických útvarov.

Úlohy pre budúcich učiteľov

- Čítaj *metodický pokyn* veľmi pozorne!
- Urobte komentáre a návrhy pre modifikáciu *manuálu učiacich sa*, ktorý ste obdržali na začiatku aktivity.
- Sú pravidlá stanovené v ňom dosť jasné pre žiakov?
- Použijete pri rozvíjaní aktivity vo vašej triede stručnú referenčnú príručku (t.j. sumár ako je hodina plánovaná)?
- Koľko *času* by malo byť venovaného úvodu, rozvoju aktivity a záverečnej debate?
- Mala by byť didaktická aktivita prezentovaná žiakom ako hra s určitými rolami?
- Berúc do úvahy, že *komunikácia*, aktívna aj pasívna, medzi žiakmi je značne relevantná v tejto aktivite, aký druh *lingvistického registra* použijete so žiakmi?
- Je dôležité, aby dvojice žiakov boli párované podľa rovnakých schopností?
- Čo sa týka *geometrického útvaru*, ktorý má byť narysovaný, je lepšie vybrať útvar, ktorý už žiaci poznajú alebo nový?



- Aké sú *výhody* a *nevýhody* použitia známeho resp. neznámeho útvaru?
- Je lepšie použiť *hárok štvorcového papiera* alebo *čistý hárok*?
- Iba *jednoduché* inštrukcie sú dovolené. Pojem *jednoduchej* alebo *unitárnej inštrukcie* môže byť dosť kontroverzný: urobte voľbu a vysvetlite ju žiakom. Prečo a ako?
- Aká *predošlá znalosť* sa vyžaduje pre aktivitu?
- Vymenujte rôzne možné *postupnosti inštrukcií* pre narysovanie zvoleného geometrického útvaru.
- Uved'te príklady možných *nejednoznačných inštrukcií* a následné rôzne nákresy a nedorozumenia.
- Je vaším cieľom zaviesť *definíciu* daného geometrického útvaru?
- Ako by ste mohli pomôcť žiakom vo fáze prechodu od *opisu* geometrického útvaru, cez (niektoré) jeho vlastnosti, k jeho *definícii* prostredníctvom tohto plánu hodiny?
- Čo očakávate od *záverečnej debaty*? Akú úlohu jej prisudzujete?
- Budete od žiakov požadovať *záverečnú správu* o aktivite? Od jednotlivcov alebo od dvojíc?
- Vykonajte komentáre a návrhy pre modifikáciu *učiteľského manuálu*, ktorý ste obdržali na začiatku aktivity.
- *Splnili* ste ciele, ktoré ste si zadali pre tento plán hodiny?

Úlohy pre žiakov

- Čítajte *manuál učiacich* sa veľmi pozorne!
- Presvedčte sa, že sa zhodujete s vaším učiteľom a vaším priateľom vo dvojici o význame *unitárnej inštrukcie*.
- *Nie je dovolené opraviť* danú inštrukciu alebo časť nákresu. Buďte veľmi opatrní pred tým ako otvoríte ústa alebo pred rysovaním!
- Kedy ste (osoba, ktorá prijímala inštrukcie) *realizovali*, čo bol geometrický útvar, ktorý sa mal narysovať? Pomohlo vám to? *Prestali ste vykonávať* aktuálne inštrukcie zadávané vaším priateľom (t.j. začali ste ich ignorovať)?
- Nakoľko bola vaša *predošlá geometrická znalosť* užitočná?
- Nakoľko zložité bolo *pochopiť význam inštrukcie*? Uved'te aspoň jeden príklad.
- Obdržali ste nejakú *nejednoznačnú inštrukciu*? Ak áno, uved'te príklad.
- *Narysovali ste* (osoba, ktorá prijímala inštrukcie) geometrický útvar *predtým ako* ste začali dávať inštrukcie alebo ste ho rysovali krok za krokom, čiže ste robili o čo vás žiadal priateľ? Ak sa tak stalo, pomohlo vám to?
- Nakoľko zložité bolo nájsť vhodné *slová* pre zadanie inštrukcie? Uved'te aspoň jeden príklad.
- Ste *spokojní* so skúsenosťou? Prečo?

- Páčilo by sa vám viac *vymeniť si úlohy* s vaším partnerom?
- Bolo zložité uvedomiť si, že niektoré vlastnosti daného geometrického útvaru *závisia* na niektorých iných? Uveďte príklad.
- Prečo, podľa vášho názoru, váš učiteľ *navrhol* túto aktivitu?
- Urobíte *správu* z tejto aktivity?
- Vykonajte komentáre a návrhy pre *modifikáciu* začiatočníckeho manuálu, ktorý ste obdržali na začiatku aktivity.

PILOTOVANIE

Tréningový program

Na začiatku programu trénujúci učitelia dali budúcim učiteľom prázdny hárok papiera a začiatočnícky manuál s vysvetlením aktivity, ktorá práve mala začať. Budúci učitelia boli zoskupení po dvoch a sami sa rozhodli, ktorý z nich má dávať inštrukcie a ktorý ich prijímať a robiť nákres. Budúci učitelia, ktorí zadávali inštrukcie obdržali kúsok papiera so slovom *kosoštvorec* alebo *kocka*.

Hneď ako budúci učitelia začali aktivitu, niektorí z nich požiadali o viac vysvetlenia pre význam pojmu *jednoznačný pokyn*. Trénujúci učitelia poskytli trochu viac nematematických príkladov. Preto aktivita začala polhodinu po začiatku tréningového programu.

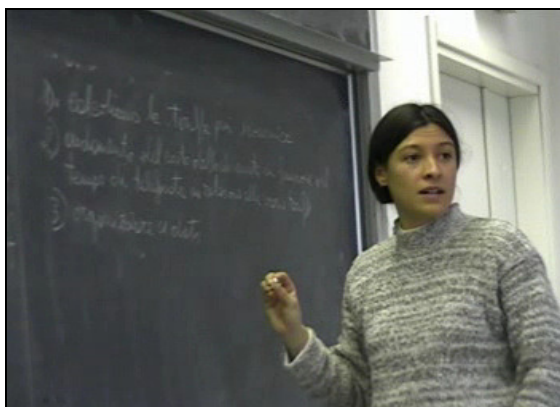


Diskusia študentov učiteľstva

Po ďalšej polhodine, keď všetky dvojice skončili aktivitu inštruovania – rysovania – opisovania - definovania, začala diskusia medzi pármí. Nasledujúca debata v triede bola organizovaná v troch etapách:

- všeobecné záležitosti, hlavne týkajúce sa pravidiel v manuáli začiatočníka;
- porovnávanie výsledkov (zoznam inštrukcií, nákresov, opisov a definícií);
- poznámky a komentáre na ne, čo sa týka najprv kosoštvorca a následne kocky.

Diskusie a debaty trvali tri hodiny, až do konca tréningového programu.



Výklad študentky v diskusii

Väčšina budúcich učiteľov sa vyjadrila, že si uvedomili ako zložité bolo vyjadriť jasným a stručným spôsobom aj ľahké matematické pojmy a vlastnosti, tak ako si to inštrukcia vyžaduje, hlavne používajúc iba prirodzený jazyk a nie matematický jazyk. Najzložitejšia úloha bola nájsť správnu rovnováhu medzi dvoma jazykmi, tiež berúc do úvahy obmedzenia dané v manuáli začiatočníka, čo sa týka použitia matematickej terminológie.

Ako sa očakávalo, väčšina náčrtkov bola správna, hoci mnoho budúcich učiteľov sa vyjadrilo, že hneď ako prišli na to, aký útvar mal byť narysovaný, dokončili rysovanie (takmer) ignorujúc následné inštrukcie od svojho partnera vo dvojici. Toto by mohlo byť považované za slabý bod tejto časti pilotovania návrhu, pretože v takých prípadoch bolo nemožné porovnať špecifické inštrukcie so súvisiacim náčrtom. Preto je dôležité viac zdôrazniť a tiež nasmerovať pozornosť učiacich sa na fakt, že ľubovoľný náčrt musí korešpondovať presne s danými inštrukciami, bez ohľadu na to, či sú správne alebo nesprávne.

Počas diskusie bolo prezentovaných niekoľko dvojzmyselných pokynov, takže umožnili trénujúcim učiteľom pripomenúť budúcim učiteľom niektoré matematické pojmy a/alebo lepšie porozumieť niekoľkým z nich. Je dôležité načrtnúť tu, že univerzitná dráha všetkých budúcich učiteľov v triede spočívala väčšinou v prírodovedných predmetoch, ale nie v matematike. Mali iba jeden alebo dva kurzy matematiky počas svojich bakalárskych štúdií.

Potreba lepšieho vstrebania niektorých základných matematických pojmov sa stala podľa očakávania evidentná, keď začala diskusia o definíciách *kosoštvorca alebo kocky*. Dost' často vzťah medzi popisom vlastností a definovaným geometrickým útvarom nebol vôbec jasný. Preto bolo nevyhnutné stráviť veľa času práve s týmto a s rozdielom medzi obrazom/náčrtom geometrického útvaru a samotným geometrickým útvarom.

Program v triede

Dvaja budúci učitelia sa ponúkli pilotovať plán hodiny v druhom ročníku strednej školy používajúc kosoštvorec a dvaja ďalší ponúkli pilotovanie v tretej triede používajúc kocku. Pilotujúci budúci učitelia boli predtým opäť požiadaní učiteľmi urobiť svoje komentáre a poznámky týkajúce sa aktivity a pravidiel pre žiakov (12-13 ročných) pre efektívny a užitočný vplyv pilotovania, podľa cieľov pôvodne zadaných učiteľmi

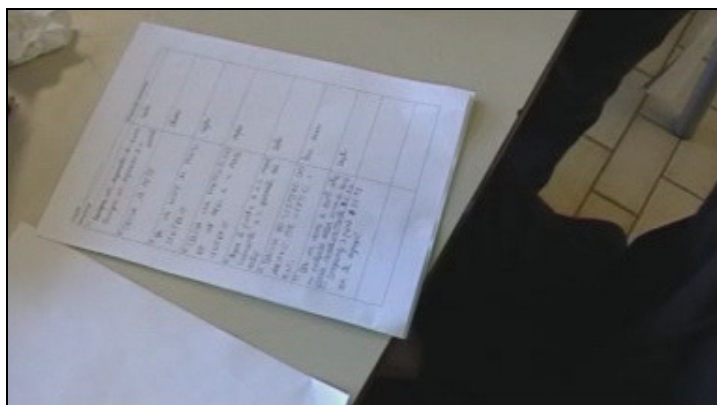
a možných modifikácií práve odsúhlasených medzi budúcimi učiteľmi. Manuál začiatočníka bol pred vstupom do triedy trochu modifikovaný. Budúci učitelia sa rozhodli pracovať so štvorcovým papierom bez geometrických nástrojov ako sú napr. pravítko a štvorcový diagram.



Dvojica pracuje podľa pokynov

Najvýznamnejšie výstupy, podobné výstupom s budúcimi učiteľmi:

- Bolo nevyhnutné lepšie vysvetliť význam unitárnej inštrukcie.
- Niektorí inštruktori povedali, že bolo zložité nájsť správne slová pre usporiadanie niektorých inštrukcií, dokonca aj vtedy, ak mali aj jasnú predstavu čo chceli, aby ich spolužiaci narysovali.



Manuál s pokynmi

- Niektoré inštrukcie boli nejednoznačné, a preto zavádzajúce.
- Po niekoľkých inštrukciách väčšina žiakov úspešne dokončila rysovanie (takmer) ignorujúc zostávajúce inštrukcie: niektoré nákresy boli správne dokonca aj v prípade, že inštrukcie boli nesprávne (dôležitá vec bola dosiahnuť úspech, vyhrať hru!).
- Použitie štvorcového papiera urobilo rysovacie aktivity ľahšími.



Dôsledok neúplných pokynov...

Najvýznamnejšie výstupy, rôzne od výstupov s budúcimi učiteľmi:

- Od začiatku programu si žiaci sťažovali na rozdiely v terminológii používanej budúcimi učiteľmi aj v príručke aj v ústnej komunikácii.
- Väčšina žiakov dobre využila písmená označujúce konce úsečiek.
- Pre väčšinu žiakov bolo opísanie a definovanie geometrického útvaru ekvivalentným.
- Zaostávajúci žiaci získali veľa z takéhoto druhu aktivity.
- Záverečná debata v triede začala s tým, že každá dvojica prezentovala tieto aktivity za diskusiu pre celú triedu.
- Zámenou úloh opísaných dvojíc bola dodatočná aktivita, ktorú chceli žiaci skúsiť na rôznych obrázkoch.

Spätná väzba pre budúcich učiteľov

Na programe spätnej väzby sa zúčastnili dvaja žiaci ako aj dvaja trénujúci učitelia a všetci budúci učitelia.



Študenti vysvetľujú postup kolegom

Štyria budúci učitelia prezentovali pilotný projekt so žiakmi pre svojich kolegov, komentujúc pritom poznámky a ukazujúc videoklipy z triedy. Väčšina výstupov z pilotovania bola predmetom špecifickej diskusie. Avšak treba povedať, že zatiaľ čo žiaci boli aktívni v diskusii, nepilotujúci budúci učitelia iba zriedka vstúpili do debaty.



Žiaci v aktívnej diskusii s vyučujúcim študentom

Dodatočné závery z diskusie:

- Nájst' vhodný spôsob uvedenia a motivácie cieľov aktivity.
- Nájst' vhodný didaktický kontrakt medzi učiteľmi a žiakmi pre implementáciu aktivity.
- Manažovať čas v triede (pilotovanie si vyžiadalo viac času, než sa pôvodne plánovalo).
- Uvažovať predošlú znalosť geometrického softvéru ako možného zdroja pomoci, obzvlášť pre žiakov, ktorých úlohou je dávať inštrukcie.
- Vyznačiť rozdiel medzi presnosťou matematického jazyka a "flexibilitnosťou" prirodzeného jazyka.
- Rozhodnúť ako možno prechod od opisu geometrického útvaru k jeho definícii demonštrovať na druhom stupni základnej školy.

Druhá pilotáž

Lucia Doretta*

IMPLEMENTÁCIA PLÁNU

Aktivita bola zacielená na to, aby budúci učitelia pouvažovali nad rozdielnosťou jazykov, grafického a hovorového, ktoré sa vyskytujú v geometrickej rozprave a určujú jeho rozvoj cez koordinovanú interakciu. Ukázalo sa byť zaujímavou príležitosťou podčiarknuť potrebu posilniť vyučovanie s použitím rôznych registrov reprezentácie a ich koordináciou v geometrii cez špecifické aktivity pre konverziu jednej do druhej.

Aktivity vyvíjané v tréningovom programe

Počet budúcich učiteľov: 18

* Dipartimento di Scienze Matematiche e Informatiche, Università di Siena, Taliansko.

Celkové trvanie: štyri hodiny (jedna hodina práce vo dvojiciach – tri hodiny na diskusiu)

Aktivita bola navrhnutá podľa inštrukcií pilotujúcou skupinou v Pise.

Budúci učitelia boli zoskupení do dvojíc a v každej dvojici boli ustanovené úlohy prijímateľa a poskytovateľa inštrukcií. Každý budúci učiteľ potom dostal manuál s inštrukciami spolu so zvyškom materiálu. Pre začatím aktivity bolo nevyhnutné objasniť význam vyjadrenia unitárnej (jednoduchej) inštrukcie zahrnutej v hárku na príkladoch, aby sa umožnilo účastníkom narysovať útvar v postupných krokoch. Na hárkoch pre tých, ktorí poskytovali inštrukcie boli slová *kosoštvorec*, *rovnoramenný lichobežník* alebo *kocka*. Na konci prvej fázy, po hodine a pol od začiatku pracovného programu:

- každý člen dvojice si vyplňal vo svojom hárku buď zadávané alebo prijímané inštrukcie, písomne poznamenávajúc možné komentáre a zadávajúc definíciu útvaru.
- hárok s menom útvaru aj s nákresom bol ukázaný.

Nasledovná fáza pozostávala z kolektívnej diskusie práce každej dvojice. Prvé komentáre budúcich učiteľov boli o neočakávaných ťažkostiach s ktorými sa stretli pri tejto práci napriek ich znalosti uvažovaných geometrických útvarov. Každý súhlasil, že úloha *poskytovateľa inštrukcií* bola zložitejšia ako úloha *prijímateľa a vykonávateľa inštrukcií*: tí, ktorí zadávali inštrukcie si museli vybavovať obraz a meno útvaru v ich mysli, interpretovať tento obraz vnímaním aj v mysli a formulovať vhodné odkazy pre jeho reprodukciu. Niektorí prehlásili, že nestihli dokončiť zoznam inštrukcií (dokonca po mnohých pokusoch), iní priznali, že mali ťažkosti so spôsobom ich formulácie a neboli si istí, či mohli byť zrozumiteľné pre ich kolegu. Potom boli niektoré zoznamy inštrukcií poskytnuté budúcimi učiteľmi (a zreferované na fólii) skúmané a okomentované spolu so spôsobom akým tieto inštrukcie boli interpretované a graficky reprezentované tými, ktorí ich obdržali.

V Prílohe C prezentujeme niektoré pracovné listy okomentované počas zasadnutia s budúcimi učiteľmi.

Toto poskytlo príležitosť zauvažovať s budúcimi učiteľmi o dvoch nasledovných aspektoch:

- matematický jazyk a jeho úloha v procese získania vedomosti
- úloha definícií v geometrii.

A. Matematický jazyk a jeho úloha v procese získania vedomosti

Vhodné použitie jazyka predpokladá plné uvedomenie si matematických termínov, ktoré boli zavedené a preukázanie jednoznačných inštrukcií, ktoré môžu byť interpretované rovnako každým. V rôznych situáciách boli dané inštrukcie, ktoré umožnili narysovanie útvarov s geometrickými charakteristikami rôznymi od tých, ktoré sme chceli získať (napríklad nasledujúce inštrukcie: *1. narysuj úsečku; 2. narysuj inú úsečku, kolmú na ňu v jej strede*, nevedú k jednoznačnej identifikácii kosoštvorca ako boli mienené).

Mali sme pocit, že téma použitia jazyka by mohla poskytnúť materiál na štúdium, hoci nie všetci budúci učitelia sa plne stotožnili s problémom.

Niektorí boli udivení kritickou analýzou realizovanou na základe daných inštrukcií, keďže verili, že *”hoci inštrukcie nie sú veľmi presné, ich prijímateľ je vedený, aby ich interpretoval a vykonal presne”*. Pri niektorých nákresoch sme si všimli, že útvary boli tie zamýšľané, ale nebolo možné ich dedukovať zo zadaných inštrukcií.

Tendencia prezentovať zlé alebo chybné odkazy bola za účelom vyplnenia informačných medzier na báze globálnych odkazov, použijúc fenomény vnímania a regularizácie; v iných prípadoch počítačová vizualizácia útvaru generovaná sprvoti prijatou informáciou viedla prijímateľa pokračovať v správnom nákrese hoci inštrukcie neboli vhodné¹.

Diskusia nás tiež viedla k uvažovaniu nad rozdielmi medzi prirodzeným jazykom, charakterizovaným bohatosťou a pestrosťou výrazov a matematickým jazykom, v ktorom každý termín má špecifický význam a tento determinuje jeho použitie.

Napokon bolo poznamenané, že v mnohých prípadoch bol počas zadávania inštrukcií zavedený ‘cudzí’ prvok: máme na mysli, že sme použili informáciu opisujúcu útvary lokalizované štandardným spôsobom v prirodzenom referenčnom rámci vymedzenom hranicami strany. Toto poukázalo na existenciu stereotypov v mentálnej reprezentácii pojmov a geometrických vzťahoch (v skutočnosti, inštrukcie často obsahujú pojmy ako *”horizontálny”* a *”vertikálny”*: *”narysuj horizontálnu úsečku”*, *”narysuj vertikálnu úsečku idúcu cez stred”*).

Skúsenosť viedla budúcich učiteľov k uvažovaniu nad potrebou rozvíjať špecifické aktivity vzťahujúce sa k učeniu a použitiu matematického jazyka pri vyučovaní. Hoci správne použitie jazyka si vyžaduje značný čas dozrievania, je to napriek všetkému základný nástroj pre tvorenie vedomostí.

B. Úloha definícií

Ďalší bod na uvažovanie bol navrhnutý požiadavkou na pracovnom liste poskytujúcom definíciu rysovaného alebo opisovaného útvaru. Táto požiadavka bola interpretovaná rôznymi spôsobmi budúcimi učiteľmi: niektorí iba naznačili meno útvaru a iní vymenovali mnoho vlastností, často viac než bolo potrebné na ich charakterizáciu.

Ako príklad je tu niekoľko definícií kosoštvorca daných budúcimi učiteľmi ukazujúcich tento aspekt a ktoré boli analyzované počas pracovnej sekcie:

- Kosoštvorec: *”Rovinný geometrický útvar, špeciálny prípad rovnobežníka s protíľahlými stranami po dvoch rovnobežnými a vnútornými uhlami po dvoch zhodnými a navzájom kolmými uhlopriečkami rôznych dĺžok”*.
- Kosoštvorec: *”Štvoruholník majúci všetky strany rovnaké a zhodné protíľahlé uhly”*.

¹ V jednom komentári sme čítali *”Hoci náznaky neboli niekedy veľmi presné, pracovala som podľa nich najlogickejším spôsobom (alebo azda najtriviálnejším!) pravdepodobne vďaka našim geometrickým pojmom”*.



- Kosoštvorec: *”Rovnobezník s navzájom kolmými a nie zhodnými uhlopriečkami”*.
- Kosoštvorec: *”Štvoruholník so štyrmi zhodnými stranami, po dvoch rovnobežnými”*.

Uvažovali sme nad významom definície v matematike a nad rozdielom medzi vlastnosťami, ktoré *opisujú* útvar a vlastnosťami, ktoré ho *definujú*. Osobitne sme diskutovali o tom ako *”minimalizovať”* vyslovené vlastnosti v prípade kosoštvorca, tak aby sa zakaždým našli nutné a postačujúce, ktoré ho charakterizujú. Všimli sme si, že nájdenie nutných a postačujúcich vlastností je základný moment pri konštrukcii definícii, ale zaiste predstavuje delikátny a zložitý moment prechodu pre žiakov. Teda potrebujeme sa pokúsiť naučiť sa so žiakmi vlastnosti za účelom konštrukcie definícií, ktoré používajú špeciálne navrhnuté materiály² a/alebo Cabri software (konštrukčný mód Cabri poukazuje na to, ktoré nutné a postačujúce vlastnosti boli uvažované, a preto ktorá definícia je za tým).

Poukázali sme na to, ako táto záležitosť definície je striktne prepletená s tou týkajúcou sa klasifikácie: t.j. vlastnosti vyjadrené definíciou musia umožniť zahrnúť do určitej triedy iba objekty, ktoré majú dané vlastnosti. Tiež sme si všimli ako definície dané budúcimi učiteľmi často viedli ku *”klasifikácii rozkladom”* (požadujúc, aby *kosoštvorec bol rovnobezník s navzájom kolmými a nie zhodnými uhlopriečkami* implikuje odstránenie štvorcov z množiny kosoštvorcov). Toto dalo príležitosť poukázať na fakt, ktorý Euklides v jeho *”Základoch”* definoval partíciu: napríklad, definície štvoruholníkov, ktoré majú za cieľ určiť partíciu množiny týchto útvarov. Voľba, ktorú si teraz volíme dáva prednosť definíciám, ktoré sú príčinou inkluzívnych vzťahov, umožňujúc porovnanie medzi geometrickými útvarmi, ktoré poukazuje na ich podobnosti a rozdiely. Keď je nevyhnutné rozlišovať medzi pojmi (napr. konkávne alebo konvexné štvoruholníky), je potrebné siahnuť po definíciách partíciou. Diskutovali sme fakt, že klasifikácia inklúziou, hoci je zložitejšia, umožňuje deduktívnu systematizáciu pojmov (jednotlivé pojmy sú podmnožinou všeobecnejších), je ekonomickejšia ako klasifikácia partíciou a umožňuje dať pre každý geometrický objekt viac alternatívnych definícií (*štvorec je kosoštvorec s rovnakými uhlopriečkami alebo obdĺžnik so všetkými stranami rovnakými*).

Vo vyučovaní je fundamentálne nepredbiehať uvedenie definícií pred konštrukciou prostredia, v ktorom dostávajú zmysel.

Aktivity implementované v triedach

Počet budúcich učiteľov: 2

Celkové trvanie aktivity v každej triede: dve hodiny (jedna hodina na prezentáciu a implementáciu aktivity – jedna hodina na diskusiu)

² Napríklad *”dynamické modely”*: manipulujúc, analyzujúc a opisujúc ich možno zhromaždiť *”prvky”* na konštrukciu definícií útvarov vzťahujúcich sa k rôznym vlastnostiam.

Aktivity boli navrhnuté dvoma budúcimi učiteľmi v ich triedach, a síce v triede 6. ročníka (18 žiakov vo veku 11-12) a v triede 8. ročníka (18 žiakov vo veku 13-14), a v dvoch triedach 7. ročníka (20 žiakov a 17 žiakov vo veku 12 -13). Zakaždým bol triedny učiteľ prítomný.

Dvaja budúci učitelia prezentovali aktivitu žiakom ako hru pre dvojice, nazvanú "Objavovanie geometrických útvarov", v ktorej jeden z dvojice dal zoznam "vodidiel", ktoré mali viesť druhého k "identifikovaniu" útvaru. Práca žiakov bola usporiadaná ako v programe tréningového kurzu. Potrebovali sme stráviť viac času ako sme očakávali vysvetľovaním ako inštrukcie majú byť zadávané (napriek tomu sme našli nevhodné formulácie v písomnej produkcii). Zvolené útvary boli *kosoštvorec, lichobežník, rovnoramenný trojuholník a kocka*.

Vo viac než jednej triede chceli žiaci experimentovať a vyskúšať si obe úlohy v rámci dvojice. V jednej z tried experimentátor navrhol modifikáciu aktivity, aby zabránil žiakom pomáhať si navzájom v rámci párov prostredníctvom zakázanej informácie. Nasledujúce modality práce boli použité: obaja žiaci v každom páre dostali hárok s menom útvaru, ktorý mal byť utajený (mená útvarov na dvoch hárkoch boli rôzne); každý žiak mal napísať zoznam inštrukcií tak, aby ich partner mohol narysovať útvar; následne hárky s inštrukciami boli vymenené a každý žiak mohol prečítať, komentovať písomne obdržané inštrukcie, ak neboli dost' jasné a narysovať útvar. Na konci mali vrátiť späť hárok s inštrukciami, komentármi a narysovanými útvarmi svojim partnerom.

Na konci každej aktivity každý pár komentoval svoju prácu so svojimi spolužiakmi a s učiteľom- experimentátorom.

Spoločná diskusia spätnej väzby

Počet budúcich učiteľov: 18

Celkové trvanie: dve hodiny.

Tí, ktorí pracovali v triedach opísali svoju skúsenosť.

Jeden z bodov sa týkal údivu, ktorý zakúsili žiaci pri navrhovanej aktivite: bolo nezvyčajné a cítili sa nepripravení a báli sa, že budú negatívne hodnotení učiteľom. Iba po uistení, že to je len hra mienená pomôcť im pri štúdiu geometrie sa cítili oveľa uvoľnenejšie a slobodnejšie pri svojom vyjadrovaní sa.

Niekoľko párov, zvlášť v triede 7. ročníka bolo ovplyvnených faktom, že "museli" poskytnúť správny nákras útvaru a nechať ho k ukázaniu tak či onak, hoci bol nekompatibilný s inštrukciami napísanými na hárku (jasný znak zakázanej výmeny informácie). Kvôli tomuto učiteľ- experimentátor uviedol modifikáciu, keď navrhol aktivitu v druhej triede 7. ročníka žiadajúc žiakov hrať rovnakú úlohu simultánne, ale na dvoch rôznych útvaroch. Výsledky boli, ako sa očakávalo, zmysluplnejšie a ukázali vo všeobecnosti dobrú korešpondenciu medzi systémom inštrukcií a narysovaným útvarom.

Tiež sme si všimli, že žiaci (tak ako budúci učitelia v tréningovom programe) ohodnotili úlohu zadávania inštrukcií ako najzložitejšiu a pripustili, že mali

pochybnosti o spôsobe ako sa vyjadrovali. Tí, ktorí obdržali inštrukcie pripustili, že mali často problém a niekedy urobili náčrt po tom ako osobne interpretovali inštrukcie (*"Ak by som nepochopil, čo to bolo, nikdy by som nenarysoval útvar: niektoré údaje boli trochu uletené"*).

Niektoré práce produkované žiakmi boli preskúvané: ukázali rôzne úrovne vhodnosti použitia geometrického jazyka a v niektorých prípadoch silný kontrast medzi tým, čo chceli opísať a spôsobom ako to urobili. Iný aspekt, ktorý sme podčiarkli bola ťažkosť v priradení významu výrazu "podajte definíciu narysovaného útvaru", čo pre mnohých žiakov znamenalo napísať jeho meno a pre iných vymenovať niektoré jeho vlastnosti.

Komentáre

Navrhovaná aktivita viedla budúcich učiteľov k uvažovaniu nad viacerými aspektmi.

- Ťažkosť v používaní matematického jazyka správnym spôsobom: neistoty, pochybnosti a chyby ukázané v poskytnutí inštrukcií vyjadrovali potrebu preferovať, pri vyučovaní, proces verbalizácie, ktorý vedie študentov nie iba k vyjadreniu ich myšlienok explicitne ale aj k tomu, aby skúsili a urobili to jasným a správnym spôsobom, aby boli pochopení.
- Potreba použiť vhodne lingvistický nástroj, jeho použitie je fundamentálnym krokom ku konštrukcii vedomosti, hoci to vyžaduje značný čas pre dozrievanie.
- Potreba rozvinúť aktivity ako táto, pretože poskytujú informáciu o žiackych vedomostiach, pojmovej úrovni, ktorú dosiahli, možné medzery a nedorozumenia. Táto informácia je fundamentálna pre schopnosť pôsobiť v triede s vhodnými a dobre plánovanými vyučovacími akciami.
- Všeobecnejšia potreba rozvinúť geometrickú rozpravu prostredníctvom koordinovanej interakcie rôznych registrov (verbálneho, grafického a symbolického) a ocenenie dôležitej úlohy hranej vnímaním a vizualizáciou.

Jeden budúci učiteľ napísal v jeho komentári:

Osobne si myslím, že aktivita, ktorú sme robili, bola veľmi zaujímavá. Pretože nie je ľahké, dokonca ani pre tých, ktorí majú dosť hlbokú znalosť predmetu, konvertovať hovorový jazyk do grafického jazyka a obrátene. Preto si myslím, že rovnaká aktivita realizovaná na druhom stupni základnej školy môže vyvolať záujem a prirodzenú zvedavosť aj u učiteľa aj u jeho žiakov.

Tretia pilotáž (IUFM Paríž) a Záver

Franco Favilli

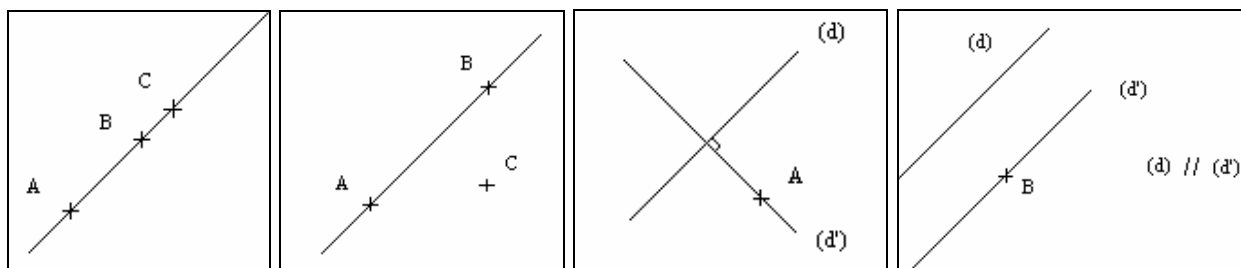
TRETIA PILOTÁŽ

Návrh bol tiež v mierne modifikovanej forme pilotovaný na I.U.F.M. Créteil v Paríži pani Catherine TAVEAU (triedny učiteľ: Cynthia DOBIN). Trieda mala 28 žiakov, vo veku od 11 do 12 rokov, v ich prvom roku strednej školy.

Dva hlavné ciele učiteľa boli rovnaké ako v dvoch predchádzajúcich pilotovaniach – posilniť znalosť geometrického jazyka u žiakov a napomôcť prechodu od vzhľadu útvaru k jeho vlastnostiam (t. j. od toho, čo môže videné k tomu, čo môže byť poznané) – návrh bol realizovaný v dvoch vyučovacích častiach.

Prvá časť

Prijímatelia mali načrtnúť útvar iba rukou, bez geometrických nástrojov.

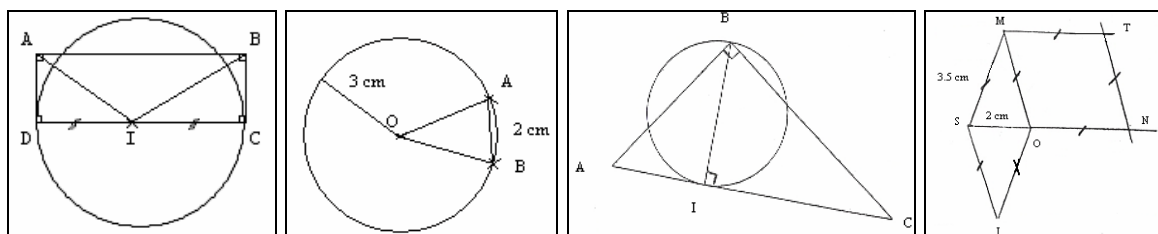


Črtáme čiary

Komentáre: Mnoho žiakov skúšalo napísať inštrukcie pre náčrt presne rovnakého útvaru (zahŕňajúc napríklad rozmery), a v niektorých prípadoch neboli inštrukcie dostatočne presné, ale toto nezabránilo prijímateľovi narysovať útvar správne.

Druhá časť

Táto časť sa uskutočnila o mesiac neskôr. Učiteľ dal žiakom geometrický mini-glosár a požiadal prijímateľov narysovať útvar presne (s pomôckami).



„Rysujeme kruhy“

Komentáre: Inštrukcie pre prvé tri útvary boli prevažne správne okrem posledného. Učiteľ sa rozhodol obohatiť sekcie počítačovou aktivitou používajúc Cabri Géomètre.

Učiteľka veľmi zaujala táto práca a presvedčila ho o ťažkostiach žiakov v tomto veku pri používaní presného geometrického jazyka. Stalo sa pre ňu zrejším, že také úlohy (zahŕňajúce tie s Cabri) sú dobré spôsoby pre žiakov pochopiť rozdiel medzi opisovaním a definovaním útvaru.

ZÁVER

Aby si žiaci lepšie uvedomili rozdiel medzi opisovaním a definovaním útvaru a aby boli vedení k pojmu definície útvaru, v prvom pilotovaní na univerzite v Pise boli nasledovné rozhodnutia urobené budúcimi učiteľmi, ktorí šli do škôl:

- najprv požiadať žiakov napísať zoznam všetkých vlastností, ktoré môžu ‘vidieť’ na danom útvare;
- potom uvažovať o každej z týchto vlastností a porovnať ju s ostatnými;
- napokon odstrániť vlastnosť zo zoznamu, ak si budú myslieť, že je dôsledkom ostatných.

Týmto spôsobom sa dosiahlo u žiakov presvedčenie, že vlastnosti, ktoré ‘prežili’ reprezentujú lepšie, jemnejšie a kratšie opis útvaru: niečo ekvivalentné alebo veľmi blízke k tomu, čo učiteľ nazýval jeho ‘definíciou’. Diskusia v celej triede o zoznamoch produkovaných rôznymi skupinami žiakov, obzvlášť vysvetlenia poskytnuté na zdôvodnenie odstránení, veľmi prispeli k tomu, že úvod k jednej z najzložitejších a najrafinovanejších matematických tém, pojmu definície, bol atraktívny aj efektívny.

Je dôležité povedať, že tri pilotovania dokázali ako relevantné je pre učiacich sa (budúcich učiteľov a žiakov) nielen zvládnuť geometrický jazyk, ale aj mať schopnosť vytvoriť a vyjadriť algoritmický proces (množinu inštrukcií)³ za účelom získania zamýšľaného produktu (nákresu) od iného učiaceho sa, od ktorého sa akurát očakáva, že bude vykonávať inštrukcie. Tak či onak, už spomenutý problém (alebo nemožnosť) učiacich sa iba realizovať dané inštrukcie a fakt, že ich predchádzajúca znalosť útvaru ich často viedla k vytvoreniu správneho nákresu bez ohľadu aké inštrukcie boli prijaté, ukazujú ako dôležité je pri uvádzaní aktivity poukázať na dôležitosť plného rešpektovania prijatých inštrukcií spôsobom, akým sú zadané a interpretované. Pre učiacich sa, zvlášť pre žiakov, túžba uhádnuť alebo dokonca ‘vyhrať’ je príliš silná a odolá hocijakému pravidlu!

Rozdiely, ktorá sa objavili v úlohách daných dvojiciam (poskytovateľovi a vykonávateľovi inštrukcií), silne odporúčajú zopakovať aktivitu používajúc iný útvar a vymeniac si úlohy vo dvojici, tak ako sa to stalo v prvých dvoch pilotovaniach.

DOPORUČENÁ LITERATÚRA

Ellerton, N.F. and Clarkson, P.C. (1996). Language Factors in Mathematics Teaching and Learning, in Bishop A.J. et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 987-1033). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Favilli, F., Japelt, A. and Novotná, J. (2005). Developing good practices for teacher training focused on understanding classroom environment, in Novotná J. (ed.), *Proceedings of SEMT '05 – International Symposium Elementary Maths Teaching* (pp. 335-336). Charles University, Prague.

³ Táto schopnosť nie je samozrejماً medzi všetkými budúcimi učiteľmi a/alebo učiteľmi matematiky, ako to objasnila pracovná dielňa, ktorú k tejto problematike ako súčasť vedeckých aktivít organizoval Kongres SEMT '05 v Prahe.



- Favilli, F. and Villani, V. (1993). Disegno e definizione del cubo: un'esperienza didattica in Somalia. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 16, n.10, 907-925.
- Maier, H. (1995). Il conflitto tra lingua matematica e lingua quotidiana per gli allievi. *La matematica e la sua didattica*, 3, 298-235.
- UMI-CIIM (2001). *Matematica 2001, Materiali per il XXVII Convegno Nazionale sull'Insegnamento della matematica*. Lucca: Liceo Scientifico "A. Vallisneri".

Príloha A1: Geometrické hlavolamy – Pokyny pre žiakov

Materiály k danej aktivite: Je možné použiť len hárok papiera, pero a formulár na vyplnenie.

- Žiaci pracujú v dvojiciach. Každý žiak plní špecifickú rolu, jeden žiak (*inštruktor*) dáva pokyny a iný druhý žiak (*kreslič*) robí náčrt podľa zadávaných pokynov.

| Inštruktor | Kreslič |
|---|--|
| <p>Dostaneš hárok papiera s názvom geometrického, rovinného útvaru alebo telesa, ktorý nikomu nemôžeš ukázať ani povedať, čo tam máš.</p> <p>Tvojím cieľom je viesť spolužiaka tak, aby nakreslil daný útvar krok za krokom podľa tvojich pokynov.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Ak chceš, môžeš si daný útvar pred alebo počas hry načrtnúť. 2. Môžeš zadávať len dielcie pokyny, napr. tvoj spolužiak musí nakresliť každý pokyn, zrealizovať jednotlivé časti daného geometrického útvaru. Vysvetlíme si to na nematematickom príklade: text by mal byť napísaný <i>prestretý stôl</i>, najprv jednotlivé časti dielov a potom pokyny: <i>prestri na stôl obrus, polož nôž, polož vidličku, ...</i> Nemôžeš použiť pokyny nasledovne: <i>prestri na stôl k obedu, robíme to každý deň pred jedlom.</i> 3. Pri zadávaní pokynov používame niektoré matematické výrazy ako úsečka, os, uhol, atď. ale nemôžeme používať názvy mnohouholníkov (trojuholník, štvorec,...). Počas inštrukcií používaj matematické výrazy ako geometrické formulácie, a nie názvy objektov, ktoré predstavujú daný tvar, ktorý má byť nakreslený (napr. ak je tvarom kruh, nemôžeš povedať <i>nakresli koleso</i>). 4. Zapiš si každý pokyn do špeciálneho formulára, ktorý si dostal a urob poznámky, ak nejaké máš. 5. Ak sa ťa kreslič opýta, pokyn by si mal presne zopakovať a použiť len tie isté slová ako predtým. 6. Ďalší pokyn daj len vtedy, ak kreslič ukončí predchádzajúci. 7. Keď je posledný pokyn ukončený, napíš názov útvaru a jeho definíciu. | <p>Spolužiak dostane hárok papiera s názvom geometrického, rovinného útvaru alebo telesa. Bude sa ťa spytovať na pokyny, ako má nakresliť daný útvar.</p> <p>Cieľom je načrtnúť daný geometrický útvar krok za krokom.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Zapiš si každý pokyn, ktorý si dostal od inštruktora na špeciálny formulár. Rob si doňho poznámky ak nejaké máš. 2. Ak ti pokyn nie je jasný, môžeš sa znova inštruktora opýtať o ti to znova zopakuje ale nesmie ti to zopakovať. 3. Ak ti daný pokyn ešte stále nie je dost jasný, zapiš si ho a urob komentár do špeciálneho formulára. 4. Vykonaj pokyn a oznám to inštruktorevi, keď budeš hotový. 5. Nemal by si robiť žiadne opravy na náčrte. Ak si niečo urobil nesprávne zapiš to do daného formuláru. 6. Keď ukončíš posledný pokyn, mal by si napísať svoje meno a názov útvaru a definovať ho, čo to je. 7. Finálny náčrt môžeš ukázať inštruktorevi, ako aj celej triede, len keď obidvaja v dvojici ste už celkom dokončili. |

Príloha A2: Geometrické hlavalamy – Pracovný list

Dvojica _____

| Inštrukcie | Komentáre |
|------------|-----------|
| 1) | |
| 2) | |
| ... | |

Názov útvaru: _____

Popis útvaru: _____

Definícia útvaru: _____

Príloha B: Geometrické hlavolamy – Pokyny pre učiteľa

Cieľom metodického návodu pre učiteľov je pomôcť im adaptovať vyučovaciu činnosť na dané kompetencie. Daná aktivita je určená pre žiakov od nižšej strednej školy, kde sme museli brať do úvahy vek žiakov /11-14 rokov/, aby ich myslenie bolo otvorené pre abstrakciu. Zmeniť prístup od sústredenia k abstrakcii prislúcha k danému veku.

Ciele

Cieľom danej aktivity na jednej strane je posilnenie žiackej schopnosti používať správne jazyk geometrie, a na druhej strane rozvinúť schopnosti učiteľa zostaviť geometrické pojmy už v žiackej myšli, bez prílišného donucovania k definíciám.

Požiadavky na „backgroundové“ vedomosti

Daná činnosť vyžaduje od žiakov, aby ovládali základné geometrické pojmy, také ako sú úsečka, uhol, kolmica a rovnobežná úsečka.

Doplňkové materiály pre učiteľa

Geoplán je preto užitočným nástrojom, lebo môže reprezentovať reálnu predstavu daného priestorového kontextu. Navyše ani neobmedzuje voľnosť v žiackom myslení.

Opis a poznámky

1. Daná učebná aktivita je prezentovaná ako hra, takže znižuje stresovú situáciu počas daného predvážania a dovoľuje žiakom prežiť skúsenosť počas vzdelávania, bez stresu a aktívne. Daná aktivita je predstavená ako „role play“ – situačný dialóg, nakoľko sú tam dve odlišné role.
 - žiak, ktorý dáva pokyny – *inštruktor*
 - žiak, ktorý prijíma pokyny – *kreslič*
2. Úroveň jazyka musí byť primeraná danému veku.. Z daného vyplýva, že učiteľ by nemal používať rozkazy pri pokynoch, ktoré sú autoritatívne a odvolávať sa na jazyk, ktorý sa používa v učebniciach matematiky / napr. *vypočítaj nasledujúci výraz, vyrieš daný problém*/, ale radšej by mal používať 1. osobu množného čísla. Hoci, ak je to potrebné, môže použiť aj imperatív v otázke za pomoci slovesa- *vedieť, môcť*.
3. Pre tento druh aktivity v dvojiciach nie je potrebné, aby boli homogénne, pretože komunikácia je objektívna, u oboch je aktívna i pasívna medzi žiakmi, hoci učiteľ by mohol vytvoriť homogénne pár. V prvej fáze danej aktivity pracujú páry, preto je dôležité, aby sa ľahko spoločensky adaptovali.
4. Z pohľadu geometrického útvaru, ktorý je určený ku kresleniu, vybraný by mal byť taký útvar, ktorý žiaci už majú naštudovaný, nie nejaký nový. Hoci na jednej strane „backgroundové“ vedomosti o geometrických útvaroch by mali posilňovať žiacke vedomosti o menovaných vlastnostiach a ľahšie by mali komunikovať v dvojiciach. Na druhej strane to môže viesť k aktivite žiakov, aby si vytvárali schémy mentálne. Napr. jeden zo žiakov v dvojici, ktorý prijíma pokyn by mohol v určitom bode pokračovať v náčrte, lebo presne vie, o aký útvar ide, a nie pracovať podľa pokynov dávaných partnerom z dvojice-rovesníkom. Niečo podobné by sa mohlo vyskytnúť, aj keď žiak, ktorý dáva inštrukcie,



ťažko mu druhý rozumie a inak chápe jeho pokyny: napr. pokyn načrtni *dve paralelné strany*, neznie dosť jasne:

- či sú strany zhodné alebo nie;
- aká je vzdialenosť medzi danými dvoma stranami;
- či strany majú vrcholový bod na spoločnej kolmici alebo nie.

Je veľmi pravdepodobné, že žiak, ktorý prijíma daný pokyn, nakreslí dve paralelné strany štvorca.

Ak by sme použili neznámy útvar pre žiakov, namiesto známeho, museli by sme starostlivo zadávať pokyny, aby im vyhovovali, pretože žiaci ešte nemajú vytvorenú potrebnú mentálnu schému. Hoci v danom prípade, aktivita by bola možná, ale pre žiakov ťažšia.

5. Ak použijeme v úlohe štvorčekovaný papier, úloha bude ľahšia, pre obidvoch žiakov (a to pre toho, čo dáva inštrukcie, ako aj pre toho, kto ich prijíma). Hoci aj toto môže byť obmedzené, pretože to by mohlo zviest' žiakov k spôsobu formulovať pokyn ako napr. Nakresli šikmú úsečku pod 45° uhlom, nakoľko má štvorčekovaný papier.

V prípade, že sa učiteľ rozhodne použiť čistý hárok papiera, bolo by to užitočné dovoliť obidvom žiakom, použiť pravítko a štvorec.

Žiaci, ktorí zadávajú inštrukcie, tiež by mali dostať hárok papiera, kde by si nakreslili daný útvar, aby si to vizuálne predstavili. Naozaj žiaci vo veku 11-14 rokov majú slabú, nedostatočnú schopnosť abstrakcie a nakreslenie útvaru podľa žiackych, ich vlastných pokynov, čo by mohlo byť ľahké, zmonitorovať vlastný proces.

6. Pretože táto aktivita je založená na komunikácii medzi jednotlivými žiakmi v pároch, učiteľ by mal upriamiť žiacku pozornosť na fakt, že len jednoduché pokyny sú prípustné. Pojem jednoduchého alebo dielčieho pokynu mohol by byť celkom kontroverzný: záleží na učiteľovi, čo vyberie a vysvetlí svojim žiakom. Napríklad, v prípade nakreslenia uhlopriečok v kosoštvorci, môžu byť dve rôzne zadania inštrukcií:
 - narysuj úsečku AB – v strede bod M – narysuj úsečku MC, ktorá je kolmá na AB- narysuj úsečku MD zhodnú a susediacu s MC (štyri dielčie pokyny tvoria danú sekvenciu – úlohu).
 - Narysuj dve kolmé úsečky pretínajúce sa v strede (úloha neobsahuje dielčie pokyny). Aktivita zadávaná žiakom mala by byť priniesť úžitok, napríklad dielčie pokyny by nemali byť z matematického kontextu, ale z každodenného života, s cieľom vytvoriť pocit slobody pri rozvíjaní danej aktivity.
7. Na konci každej aktivity by sme sa mali žiakov opýtať:
 - ako pomenujete daný útvar, ktorý ste nakreslili;
 - opíšte ho;
 - definujte ho.

Poslednou fázou aktivity je užitočnosť pre žiacku konštrukciu pojmu, ktorý je daný geometrickým tvarom, od jednotlivých krokov až k celej definícii Navyše v závislosti na okolnostiach v triede, či by učiteľ mal zvoliť vyžadovanie definície daného geometrického útvaru alebo nie.

8. Záverečný rozhovor v triede je dôležitou fázou činnosti, pretože dovoľuje učiteľovi a aj celej triede pozorovať finálne náčrty a porovnať zoznam pokynov s nakreslenými náčrtmi



každého jedného páru, počúvať a diskutovať o rôznych názoroch, interpretácie na daný útvar. Z daného pohľadu nasledujúca stratégia môžeme prijať:

- Najprv by mala dvojica prezentovať a opísať danú aktivitu pre spolužiakov, ktorí sa pýtajú a komentujú, čo to znamená a potom vytvoriť podmienky na reálnu diskusiu medzi rovesníkmi;
- Potom vystriedať zloženie párov napr. inštruktor daného páru pracuje s kresličom z iného páru dvojice. Daná stratégia by žiakom umožnila pochopiť dôležitosť použitia dielčieho matematického jazyka a terminológie.

9. Zmeny aktivity

Zabezpečte, aby všetci žiaci v triede obdržali rovnakú sadu zadaní na náčrt daného geometrického útvaru. Niektoré z týchto pokynov môžu byť viaczmyselné, takže pátrajte po žiackych reakciách pri rôznej interpretácii.

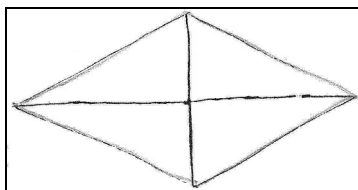
Požiadajte žiakov, aby pracovali s neštandardných geometrickými tvarmi.

- Utvorte rôzne skupiny v triede. Každá skupina si vyberie ľubovoľný geometrický útvar, ako aj sadu sekvencií - postupností dielčích pokynov k danému náčrtu. Učiteľ sa opýta v každej skupine, či má kresliča a či si vybral daný útvar.
- Utvorte rôzne skupiny v triede. Každá skupina odovzdá sadu dielčích pokynov na kreslenie daného geometrického útvaru inej skupine a naopak, ako nejakú previerku.

Príloha C: Geometrické hlavolamy

Kosoštvorec

| <i>Zoznam inštrukcií</i> | <i>Komentáre prijímateľa</i> |
|--|--|
| 1. Narýsuj horizontálnu úsečku | |
| 2. Vezmi stred tej úsečky | |
| 3. Narýsuj úsečku idúcu cez ten stred | |
| 4. Body úsečky musia byť rovnako vzdialené od koncových bodov úsečky | "Nie je možné porozumieť, o ktorej úsečke sa hovorí" |
| 5. Obe úsečky nesmú mať rovnakú dĺžku | |
| 6. Spoj koncové body oboch úsečiek | |



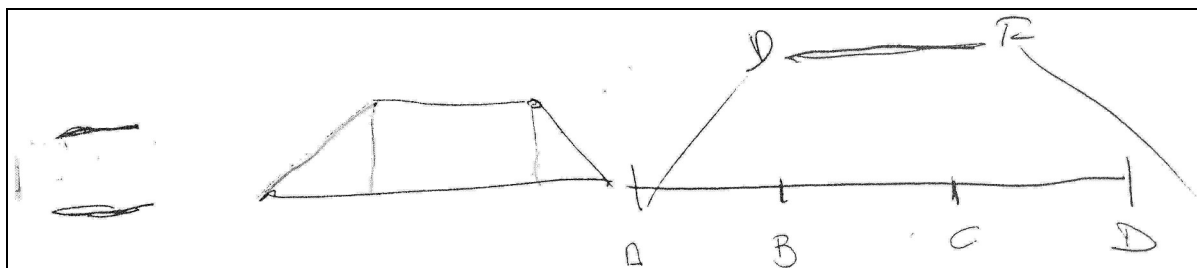
Rysovanie kosoštvorca

Definícia útvaru (od prijímateľa inštrukcií) – "Kosoštvorec: rovnobežník s navzájom kolmými a nie rovnakými uhlopriečkami."

Definícia útvaru (od zadávateľa inštrukcií) – "Kosoštvorec: rovinný geometrický útvar, ktorý môže byť považovaný za špeciálny prípad rovnobežníka s protiľahlými stranami rovnobežnými, vnútornými uhlami po dvoch zhodnými a navzájom kolmými uhlopriečkami nemajúcimi rovnakú dĺžku."

Rovnoramenný lichobežník

| <i>Zoznam inštrukcií</i> | <i>Komentáre tým, ktorí dávajú inštrukcie</i> | <i>Komentáre tým, ktorí prijímajú inštrukcie</i> |
|--|--|---|
| 1. Narýsuj horizontálnu úsečku | | |
| 2. Rozdeľ horizontálnu úsečku na tri rovnaké časti | | |
| 3. Označ štyri body, ktoré si dostal na úsečke postupne A, B, C, D | | "Nebolo nám povedané, aby sme začali zľava" |
| 4. Urob úsečku rovnobežnú s BC | "Nebolo to jasné? Preskočil som pasáž: urob kolmicu na AB v bode B a kolmicu na CD v bode C" | "Môžem rysovať kdekoľvek, ale volím si rysovať ju nad BC a s rovnakou dĺžkou" |
| 5. Označ úsečku EF | | |
| 6. Spoj A a E | | |
| 7. Spoj D a F | | |



Rysovanie lichobežníka

Definícia útvaru: Útvar je rovnoramenný lichobežník, ktorý je štvoruholník s dvoma rovnobežnými stranami rôznej veľkosti a dvoma zhodnými stranami. Vnútorné protiľahlé uhly sú komplementárne.