

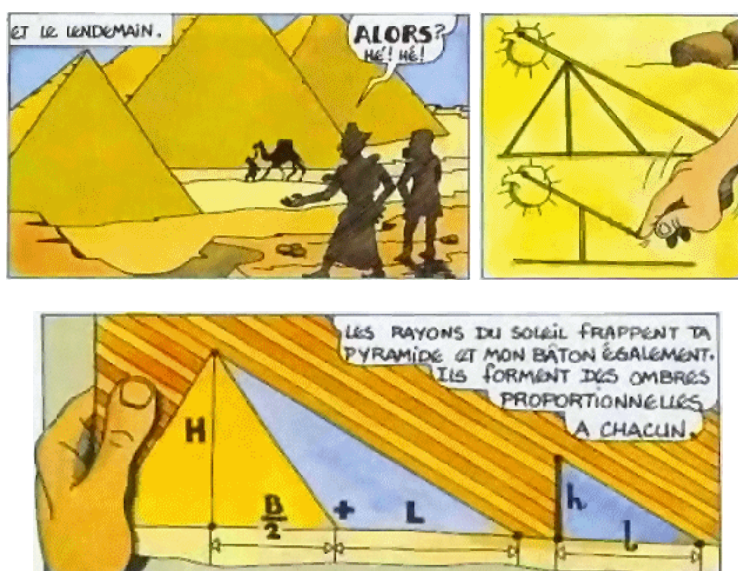
INTRODUKTION TIL PROPORTIONALITET I GEOMETRI

af Yves Alvez, Jean-François Chesné og Marie-Hélène Le Yaouanq*

INTRODUKTION

Dette tema kombinerer tre fundamentale begreber indenfor undervisning i matematik i grundskolen. Den første er defineret ud fra dens matematiske indhold: Den involverer proportionalitet, hvilket udgør én af de centrale begreber i elevernes kundskaber. Den anden involverer en didaktisk tilgang: Kombination af en geometrisk struktur med et numerisk begreb. Den tredje omhandler brugen af ressourcer og integration af nye teknologier. Kombinationen af disse tre begreber danner en integreret del af det samlede skema for oplæring og er relevant for lærerstuderende under øvelsesundervisning i en klasse.

I første omgang blev dette forløb gennemført hos én af de følgende to partnere - IUFM i Creteil, Grundskolecener i Frankrig, og Skårup Seminarium i Danmark - , det eksterne eksperiment blev gennemført ved universitetet i Bari (Italien) i to 7. klasser i en grundskole (12 - 13 årige elever).



Den berømte legende om måling af højden på den Ægyptiske pyramide.

* Institut Universitaire de Formation des Maîtres – IUFM de Créteil, Frankrig.

Hovedafprøvning

af Yves Alvez, Jean-François Chesné og Marie-Hélène Le Yaouanq

Dette forslag er et eksperiment, som blev udført for første gang i IUFM. Ud fra hele spektret af øvelsesforslag, som er til rådighed for matematik lærerstuderendes begynderundervisning, har vi til projektet "LOSSTT IN MATH" valgt introduktion til proportionalitet i geometri. Dette forslag demonstrerer lærernes vilje til at opstille et uddannelsesforløb, som kombinerer forskellige moduler, samtidig med at det tager dets fremtidige muligheder for anvendelse i projektet LOSSTT IN MATH i betragtning, samt som et øvelsesværktøj for IUFM selv.

Hvert år går mellem 50 og 80 matematik lærerstuderende for kolleger og elever (PLC2's) gennem IUFM uddannelsen i Creteil. Det involverer et 42 timer langt modul med praktisk undervisning i matematik i en klasse (modul A). Dette modul sigter mod i samarbejde med undervisningsvejlederen, at hjælpe den lærerstuderende med at opleve lærerprofessionen og lette opbygningen af dennes professionelle erfaring ved at give ham undervisningsredskaber så vel som pædagogiske og didaktiske elementer til refleksion: (officiel læseplan, udarbejdelse af måder til fremskridt, forberedelse af sekvenser og lektioner, evalueringer, opmærksomhed på elevernes forskellighed, matematisk indhold, specifik arbejde med algebra eller geometri ...).

Det indeholder også et modul i geometri, hvis mål er at fæstne grundlaget for de lærerstuderendes tilegnelse af geometri, et grundlag som vil gøre dem i stand til at opstille, styre og lede elevernes øvelser på papir og/eller på skærm. De første tre lektioner er forbeholdt arbejde med computer software i dynamisk geometri. (Geoplan-Geospace, Cabri); Hver lærerstuderende får således lejlighed til at konstruere figurer, få dem til at udvikle sig på en dynamisk måde, og betjene de specifikke software funktioner (transformation, søgning efter lokationer, kontrol af egenskaber, studie af funktioner, som er afledt af en geometrisk situation etc.). De følgende to lektioner giver mulighed for tilbagevenden til elementær geometri via vejledninger, og angive måder til at designe og opstille øvelser i geometri i en klasse. De sidste to valgfrie lektioner, kan give mulighed for på en elementær måde at opdage (eller genopdage) tre geometriske transformationer: perspektiv, lighed og spejling.

Som i enhver læringsøvelse, vil beskrivelsen og vurderingen blive gennemført med en dobbelt kronologisk tilgang: Den fra seminarielærerne mod lærerstuderende efterfulgt af den for seminarielærerne interessante del, de studerendes praktiske øvelse og dennes effekt på eleverne.

Vi vil derfor specificere vores mål med og forventninger til de studerende, dernæst vil vi introducere øvelsesforløbet, som det er blevet gennemført dette år dvs. dets udvikling fra start til slut. Det bliver efterfulgt af en efteranalyse, stadig på to niveauer, det første niveau er lektionen, som blev styret af en studerende i en klasse og det andet niveau er den mere overordnede vedrørende forslaget som helhed.

Endelig vil vi præsentere nogle perspektiver for os som lærere på IUFM i Creteil og som deltagere i projektet LOSSTT IN MATH.

EN FORANALYSE

Øvelsesforslaget er udarbejdet med henblik på praktisk gennemførelse og ikke kun på forelæsning. Det er desuden udarbejdet med vilje til at påvirke både de kognitive og formidlende dele af lærerprofessionen.

For at være mere præcis, er vores formål med dette forslag:

- At gøre IT tilgængelig for de studerende som et undervisningsredskab, især at gøre dem opmærksomme på fordelene ved at bruge IT i dynamisk geometri som et specielt værktøj til antagelse og udforskning af en egenskabs gyldighed.
- At få de studerende til at arbejde med udarbejdelse af en elevopgave, hvor instruktionerne ikke er begrænset af softwarens tekniske aspekter.
- At få de studerende til at arbejde individuelt på et detaljeret og realistisk scenario. Hvad er eleverne ansvarlige for og hvad er læreren ansvarlig for? Hvordan kan lektionen nedbrydes? Hvilke vanskeligheder kan forudses? Hvor kan syntesen passes ind? Hvilken institutionalisering (dvs. hvilke resultater og egenskaber skal eleverne opnå viden om i henhold til pensummet)?
- At få de studerende til i fællesskab at vurdere deres individuelle forslag for at få dem til at begrunde deres valg.
- At få de studerende til at give en effektiv lektion i det de i fællesskab har arbejdet med, så de kan finde ud af, at det er muligt, "at det virker", at give dem selvtillid og at opmuntre dem til at gentage forslaget (og i andre nye situationer)
- At undersøge, hvordan en ny lærer kan gøre god brug af IT ressourcer til at støtte nogle af elevernes læringsprocesser og foretage en sammenligning med potentielle øvelser under en papir/pen øvelse.
- At udvikle en relevant anvendelse for IT i grundskoleuddannelsen i henhold til pensummet.

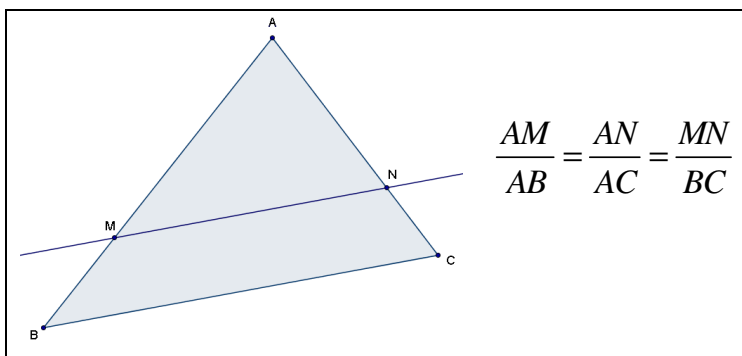
UDVIKLING

Læringsforslaget forløber i 4 trin:

1. Et IT modul (som gør god brug af computersoftware og instruktioner)
2. Modul A (arbejde med scenarier)
3. En effektiv fremlæggelse (lektioner i en klasse)
4. Igen modul A (syntese over erfaringerne)

1. trin

Ved slutningen af det første IT modul, som er helt helliget dynamisk geometri software, beder lærerne de studerende om at forberede en øvelse for 3. års elever. Øvelsen skal introducere proportionalitet i geometri. Forberedelsen skal foregå udenfor IT modulet og består i at skabe et scenario og designe elevernes opgave. De studerende har mulighed for at vælge et af to temaer - introduktion af cosinus eller introduktion af Thales læresætning - og to softwareprogrammer - Cabri eller Geoplan-Geospace. Arbejdet skal sendes til lærerne for modul A (praktik i en klasse). IT modulet ledes af to lærere fra en gruppe på femten lærere. Som for modul A gennemføres det af to lærere for en gruppe på mellem 20 og 25 studerende.



Thales' Læresætning

Officiel læseplan for 3. års elever i Frankrig 2004 - 2005*

Indhold	Færdigheder	Eksempler på øvelser, kommentarer
Trekanter bestemt af to parallelle linier, der skærer to krydsende linier.	At kende og anvende proportionalitet på længden af siderne for de to trekanter, der er bestemt af to parallelle linier, der skærer to krydsende linier. I en trekant ABC, hvor M er et punkt på siden [AB] [†] og N er et punkt på siden [AC], hvis (MN) er parallel til (BC) gælder $AM/AB = AN/AC = MN/BC$	Ligheden mellem de tre forhold vil blive bevist efter potentielle studier af nogle specifikke tilfælde. Disse kan selvfølgelig også udvides til tilfældet, hvor M og N tilhører henholdsvis [AB) og [AC), men vi vil ikke undersøge tilfældet, hvor [AM) og [AB) og [AN) og [AC) er modsatte. Thales' læresætning med alle dens gyldigheder og reciprocitet bliver studeret i det 4. år.

* I den nye 3. års læseplan (i kraft fra September 2007), er de anvendte udtryk til definition af indhold og færdigheder identiske. De tilhørende kommentarer vil imidlertid blive udskiftet med: « Ligheden mellem de tre forhold er bevist efter indledende studier af nogle specifikke tilfælde af forhold. Det udvides til tilfældet, hvor M og N er henholdsvis på [AB) og [AC). Tilfældet, hvor punkterne M og B ikke er på den samme side af A, bliver ikke studeret. Thales' læresætning med alle dens gyldigheder og reciprocitet bliver studeret i det 4. år. »

† I Frankrig betyder [AB] segment; [AB) betyder linie; (AB) betyder lige linie .

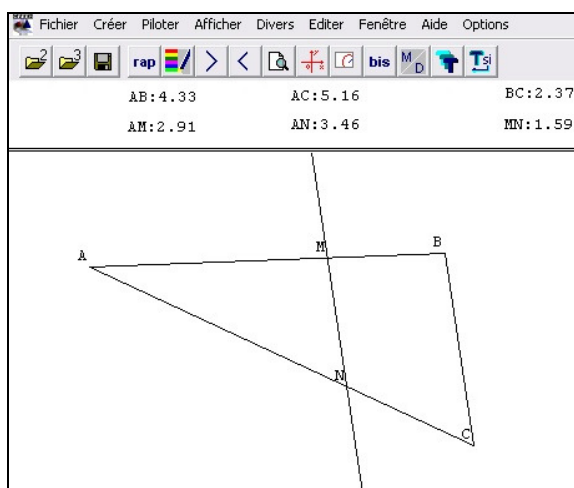
2. trin

Lærerne på modul A har modtaget de studerendes arbejder, har læst dem og kommenteret dem. De fleste studerende har valgt introduktionen til Thales' læresætning. Lektionen foregår over flere perioder.

Det begynder med, at lærerne kommer med nogle generelle kommentarer hovedsagelig til to gentagne observationer. I elevernes opgaver har de studerende ikke fremhævet proportionalitet. Næsten alle opgaver indeholder dog ordet "proportionalitet" i titlen, hvilket betyder, at dette helt præcist er lektionens hovedemne! Ikke desto mindre bliver lighed mellem forhold meget hurtigt introduceret uden mulighed for at vise proportionalitet mellem længden af trekantens sider. De beskrevne scenarier er i det hele taget meget grundlæggende, de forskellige dele er kun kort beskrevet, lærerens del kan næppe ses. Og formuleringen af den endelige antagelse afviger ikke fra fremstillingen af en egenskab.

Derefter arbejder de studerende i grupper på 4 sammensat af lærerne i forhold til deres arbejde og deres engagement i det foregående modul. (Lærerne gør dette i deres bestræbelse på at skabe dynamiske grupper med komplementerende personligheder). Deres opgave er i fællesskab at udarbejde et scenario og en elevopgave, som kan danne basis for en videoprojektor præsentation i den tredje del af lektionen.

Én af de studerende fra gruppen vil så præsentere scenariet for alle de andre. De andre studerende stiller spørgsmål for at få den studerende og hans gruppe til at begrunde deres valg og fremkalde alternativer. Lærerne giver derefter en syntese over lektionen og deres egne kommentarer. Det bliver til sidst vedtaget at benytte et fælles scenario tæt på det præsenterede. En af de studerende er ansvarlig for tegning og færdiggørelse af dokumenterne, scenario og elevopgaven. Formålet med lektionen er at skabe en dynamisk figur, så eleverne bliver i stand til at formulere en antagelse.



Et eksempel på en forventet figur.

3. trin

En effektiv undervisning i en klasse kan ikke gennemføres af alle studerende, da ikke alle har en 3. klasse at undervise i. Den filmede lektion foregår i en studerendes



klasse uden nogen institutionel vurdering. Under et forudgående møde umiddelbart før lektionen, har den studerende introduceret sin klasse og præsenteret sit projekt for én af lærerne. På samme måde gør han efter lektionen nogle kommentarer på stedet.

4. trin

Dette trin vender tilbage til modul A. Den studerende, som gennemførte lektionen, deler sine følelser ved at blive filmet med de andre og giver en kort efteranalyse af lektionen. Lærerne kompletterer analysen. De andre studerende bryder ind med spørgsmål eller med tilføjelser til det, der er blevet sagt, når de selv har undervist en klasse. Der anvendes ikke præsentation af videoen eller uddrag fra den. Der er to hovedgrunde til dette: For det første er strukturen for modul A udarbejdet før starten af øvelsen og meget kompleks. Nu bliver arbejdet med introduktion af proportionalitet i geometri og nogle af metoderne i dette specifikke øvelsesforslag integreret i kurset i løbet af året. Det var derfor under hensyn til tiden svært at tilføje et nyt element i undervisningen. For det andet er video stadig ikke anvendt ret meget i uddannelsen af matematik PLC2'ere ved IUFM i Creteil. Hverken på lærersiden eller blandt de studerende følte nogen sig helt klar til at introducere dette nye redskab som en integreret del af uddannelsen.

LEKTIONEN I KLASSEN [filmet]

Præsentation af kontekst

IT lektionen blev gennemført med en 3. klasse fra Edouard Herriot college i Livry-Gargargan i en østlig forstad til Paris. Klassen består af 23 elever, opdelt i 2 grupper, én med 11 elever, som allerede har gennemført en lignende lektion, og én med 12 elever, som skal observeres. Én elev ved hver computer.

Læreren er en lærerstuderende ved IUFM i Creteil i praktik. Ifølge ham er der ingen specifikke problemer med at styre klassen.

Der bliver dagligt gennemført en stram opfølgning på elevernes arbejde i klassen og der anvendes mundtlig deltagelse i lektionerne.

Lektionen er helliget udforskning af Thales' læresætning på 3. års niveau. Geoplan er allerede blevet benyttet af læreren på computerskærm og på tavlen, hensigten med pull-down menuerne er i dette tilfælde allerede blevet introduceret til eleverne. Så vidt læreren ved, har eleverne ikke hidtil benyttet Geoplan eller været i computerrummet i år eller tidligere, hverken i matematik eller andre fag. Eleverne opdager derfor et nyt arbejdssted.

Spørgsmålene, som læreren må stille sig selv i forvejen er:

- Hvordan vil eleverne reagere på computerprogrammet? Vil de vide hvordan de skal bruge pull down menuerne? Vil de for eksempel vide, hvordan de skal finde skæringspunkter på lige linier?
- Hvilke spørgsmål vil de stille med hensyn til funktionaliteten af computerprogrammet? (Læreren tænker særligt på om eleverne til prøve at



finde ud af om beregningerne af forhold, som blev udført på lommeregner, kunne være gjort ved hjælp af computerprogrammet).

- Hvordan vil eleverne arbejde med deres opgave?

Med hensyn til antagelse, håber læreren, at eleverne vil fortælle ham, at de færdige tabeller ser ud som de proportionale tabeller, og at dette bevis kan udledes fra forskellige eksempler. Temaet proportionalitet har været behandlet den foregående uge, via 2. års repetition indenfor en numerisk eller grafisk ramme: Blive i stand til at genkende en situation med proportionalitet (i en tabel eller i en graf), beregne en fjerde proportional.

Ca. en halv time senere planlægger læreren at introducere syntese trinnet. Han vil have eleverne til at skrive i deres opgavehæfter, enten siddende foran skærmene eller i grupper ved bordene i midten af rummet. Starten af lektionen er skrevet på bagsiden af tavlen. Han planlægger også at give dem en generisk tegning, de kan hænge tegningerne op på.

Udvikling af lektionen

1. periode (16 min)

Der er én computer pr. elev. Programmet Geoplan startes på hver arbejdsstation. Læreren udleverer straks elevopgaven. Eleverne går i gang med at arbejde og kommer hurtigt i gang med tegningerne. De har en mærkbar tendens til at holde øje med sidemandens skærm, og de spørger hinanden om deres respektive fremgang. Læreren cirkulerer i klassen fra elev til elev.

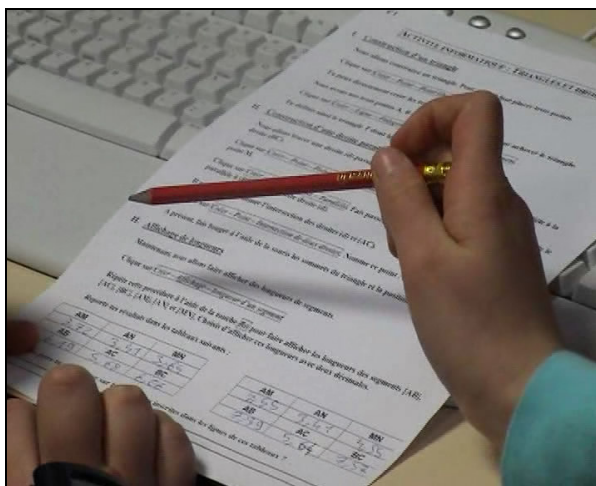
Den første vanskelighed opstår da punktet N skal oprettes. En anden tøven opstår over antallet af decimaler, som skal vises for segmenternes længde.

Til sidst får eleverne vist de ønskede seks længder, så beder læreren dem udfylde en anden tabel. De sletter så den første trekant for at få nye målinger.

2. periode (17 min)

I dette trin bliver eleverne forvirrede, først på grund af opgavens natur (hvad betyder antagelse?) og dernæst på grund af opgaven selv (hvad kan de egentlig antage?)

Så prøver læreren at føre dem på det rette spor ved at nævne både tabellerne og hvad, der blev behandlet i klassen den foregående uge. Eleverne begynder at citere Pythagoras læresætning (vi har geometri!), én af dem nævner proportionalitet.



Eksempel på elevernes tabeller

Så tager eleverne deres lommeregner frem for at bestemme en mulig proportionalitetskoefficient. Men stillet overfor de forskellige resultater på deres lommeregner, tøver de, og synes det er vanskeligt at formulere en antagelse på skrift. De vender tilbage for at lave flere beregninger på den første tabel.

Læreren henvender sig til en elev og gennemgår de første beregninger med ham, og beder ham gå videre med den anden tabel. Eleven synes meget mere tilfreds med de viste kvotienter, da hver 3. decimaltal starter med 1,70.

Læreren vender tilbage til eleven, ændrer antallet af viste decimaler i målingerne, og beder ham benytte de nye målinger og lave nye beregninger.

Der følger en kort diskussion vedrørende karakteren af diagrammet (proportionalitet eller ikke), og betydningen af målingernes nøjagtighed.

Læreren beder eleverne tage deres opgavebøger.

3. periode (15 min)

Eleverne placerer sig hurtigt, så de bliver i stand til at se læreren, kortet og at skrive ved bordet. (Nogle elever sidder ved borde grupperet i midten af rummet, andre forbliver ved skærmene, hvor de vender sig om hvis nødvendigt).

Læreren begynder at give en mundtlig forklaring "Det kan siges, at længderne af siderne på den lille trekant AMN synes at være proportionale med længderne af siderne på den store trekant ABC".

Så vender han tavlen, hvorpå den fremsatte sætning allerede er skrevet, og beder eleverne skrive den ned i deres opgavebøger.

Så udleverer han en figur lignende den, de allerede har studeret, sætter en figur på tavlen og bekræfter, at "I en sådan opstilling er kortet proportionalt".

Læreren skriver så følgende egenskab (med tilladelse): I trekant ABC, hvis M er et punkt på siden [AB], hvis N er et punkt på siden [AC] og hvis de lige linier (MN) og (BC) er parallelle, så er længden af siderne i trekant AMN proportionale med længderne af siderne i trekant ABC. Eleverne skriver dernæst egenskaben ned i deres opgavebøger.



EN EFTERANALYSE AF LEKTIONEN I KLASSEN

Eleverne er vel organiserede, deres engagement er bemærkelsesværdig og vedvarende.

Læreren har ikke inkluderet nogen mellemliggende syntese trin: Hans indgriben er altid personligt rettet. De vanskeligheder, som eleverne stødte på blev derfor behandlet gentagne gange.

Under første periode af kurset (konstruktion af figuren og visning af længdemålingerne), synes det som om software programmet har haft en betydelig drivende virkning på elevernes deltagelse i opgaven. Strukturen af Geoplan-Geospace har vist vigtigheden af at udpege geometriske objekter: Adskillige elever blev forvirrede, når små bogstaver anvendt som store bogstaver blev afvist. I almindelighed har nødvendigheden af at definere objekterne, som eleverne skal lave, fået eleverne til at være mere opmærksomme på de anvendte ord indenfor geometrien. Visningen af længdemålingerne har også fået eleverne til at stille spørgsmål til antallet af decimaler. Der var imidlertid ingen spørgsmål vedrørende den anvendte længdeenhed eller om valget af antallet af decimaler, som skal vises.

Skiftet fra observation til antagelse skete ikke spontant hos eleverne. Selv efter adskillige mundtlige påmindelser fra læreren, nævnte eleverne ikke noget om proportionalitet. Først da læreren indtrængende refererede til andre kort, som blev brugt forrige uge, nævnte én af eleverne proportionalitet. "Topaze effekten" bliver helt klart bevist her.

I dette trin af lektionen, skal det bemærkes, at læreren med fuldt overlæg har anlagt en strategi med udskiftning af arbejdet med målinger på kort med arbejde med lommeregner baseret på de viste forholdstal i Geoplan-Geospace. Læreren har to grunde til at retfærdiggøre sit valg: For det første frygtede han vanskeligheder med elevernes håndtering af programmet, da dette var hans første lektion med Geoplan-Geospace, for det andet tog han i forberedelsen af lektionen i betragtning, at øvelsen var et forsøg, hvor risikoen for uklarhed om proportionalitet, ved at arbejde direkte med forhold, var blevet nævnt.

Men de vanskeligheder eleverne oplevede hidrørte fra deres beregninger, som var et direkte resultat af hans valg, og som ikke var forudset af læreren. Resultaterne på lommeregnerne var ikke ens. Det er derfor naturligt, at eleverne tenderer til ikke at antage en situation med proportionalitet. Læreren behandler "denne didaktiske hændelse" ved at foreslå eleverne at øge antallet af decimaler, der bliver vist for længdemålingerne.

Ved at læse elevernes opgave skulle man tro, at den anden tabel sigtede på at styrke en antagelse afledt af arbejdet med den første. Men rækkefølgen i hvilken elevernes aktiviteter virkelig blev udført - udfyldning af tabellerne, dernæst beregninger af forholdene i begge tabeller, i modsætning til at arbejde med én tabel, antagelse, så arbejde med den anden tabel - har ført til modstrid mod den oprindelige plan, og har derfor svækket den eksperimentelle proces betydeligt.



Endelig kan man også undre sig over, hvordan eleverne virkelig opfatter proportionalitet, for den observerede lektion kan lede os til at tro, at det er den didaktiske fremstilling i klassen - kortet - som trigger genkendelsen af en matematisk situation. Med andre ord ser det åbenbart ud til, at opfattelsen af proportionalitet ikke er til stede, og at det er den almindelige repræsentation understøttet af lærerens forklaring, som frembringer antagelsen, som var målet.

Den sidste del af lektionen, transformationen fra antagelse til egenskab, er moderat styret af læreren: intet arbejde med bevis, ikke en gang en omtale af denne transformation, om årsagerne til hans valg. Man kan undre sig over effekten af denne situation med hensyn til elevernes læring. Bliver eleverne i virkeligheden ikke siddende tilbage med en geometrisk opfattelse (man ser hvad ... det kan siges at ...)? Hvilken status hæfter eleverne i virkeligheden på egenskaben, som var målet under lektionen: Universal eller relativ til deres tegning? Er det i virkeligheden altid sandt eller kun i nogle tilfælde, eller nogle gange "næsten sandt"?

I slutningen af lektionen kan et antal forandringer vurderes:

- 2 elever pr. computer
- Få eleverne til at arbejde på en tegning (med håndtegning) før de får lov at arbejde med computer (linier, observationer og de første antagelser).
- Få forholdene vist på Geoplan-Geospace.
- Afsæt på første kort længden af siden $[AB]$ på en trekant og positionen M på $[AB]$, flyt så M på $[AB]$.
- Få eleverne til at starte med situationer der svarer til forhold som $\frac{1}{2}$ eller $\frac{1}{4}$.

EN EFTERANALYSE AF ØVELSEN.

Hele eksperimentet er en kilde til nye spørgsmål, idet man betragter emnet der bliver behandlet i klasseværelset på den ene hånd og læreruddannelsen på den anden hånd.

Lærere ved starttræningen (og også andre) er tvunget til at følge de officielle instruktioner. Analysen af mødet i klasseværelset og specielt lærerens valg af at droppe visningen af forholdene i anvendelsen af tabellerne og lommeregner rejser følgende spørgsmål: Opmunter ordlyden af Thales' sætning som det forekommer i læseplanen til at der arbejdes med forhold eller med aspektet om proportionalitet i geometri, som det vil være tilfældet for ligedannede trekanter i det femte år?

Svaret er ikke institutionelt, da det dobbelte aspekt dukker op faktisk eksplisit i hvert af de tre søjler indhold/færdigheder/kommentarer i læseplanen. Det er derfor overladt til læreren at overveje, i overensstemmelse med den "gode praksis", som lærerstuderende har fået: Vælger man at lade eleverne arbejde direkte med forholdene indebærer Ganske afgjort nogle fordele ved at tillade dem at komme hurtigere frem til slutningerne, nemlig at forholdene er ns, men indebærer den store risiko at det vil skjule proportionaliteten af længden. På den anden side ved at lade eleverne udlede noget om proportionaliteten af længderne, kunne synes mere meningsfuldt, men svært at opnå, med risikoen for formindsket engagement fra



elevernes side. Det har været understreget begge gange at arbejdet har indbefattet målinger og ikke størrelse.

Idet man tager højde for både det dobbelte aspekt, nævnt foroven og den senere analyse af mødet, ser det derfor rimeligt ud at foreslå følgende trin for den lærerstuderende, hvilket også er foreslået i den nye læseplan:

- At starte med pen/papir arbejde i simple tilfælde
- At få eleverne til at antage disse specifikke tilfælde med udtryk som "...flere gange..." "...færre gange..."
- At oversætte denne antagelse til en slags lighed mellem forhold.
- At skifte til computer software i dynamisk geometri for at forstærke denne antagelse ved at benytte visning af forhold.
- At formulere den søgte egenskab i en dobbeltversion som foreslået i læseplanen, proportionelle længder og lighed mellem forhold.

KONKLUSION

Samtidig med øvelsesemnerne, som blev defineret i første del af denne præsentation, blev arbejdet med at udarbejde et scenario med én identisk lektion for alle studerende fortsat med *høj prioritet* af to hovedårsager:

- Det letter arbejdet med modulerne (før og efter)
- Det opmuntrer til studie af effekten af lærernes praktiske øvelse på elevernes aktiviteter ud fra én enkelt forud beskrevet opgave.

Vurderingen, som blev gjort under og efter dette arbejde, tillader os at tro, at denne effektive øvelse faktisk har været i overensstemmelse med de oprindelige mål og synes at bekræfte relevansen af denne type øvelser på flere niveauer;

- Integrationen af TICE (IT) i de studerendes praktiske øvelser.
- Betydningen af at udarbejde skrevne scenarier og anvende dem.
- Mangfoldigheden og dybden af udvekslinger mellem studerende/studerende og lærere/studerende.
- Udgivelsen af et typisk scenario, hvis værdi endnu skal testes, kan retfærdiggøres af et kompromis mellem et højt potentiale for passende anvendelse af de studerende og en tilfredsstillende grad af effektivitet i klassen (det første punkt er nødvendigt for det andet kan ske, men på ingen måde tilstrækkeligt).

Videoptagelsen, som blev foretaget med én studerende, garanterer imidlertid på ingen måde en påvirkning af de øvrige studerende. Problemet med evaluering af elevernes opnåede viden i den videofilmede studerendes klasse og også evalueringseffekten af en sådan øvelse på de øvrige studerendes praktiske undervisning forbliver derfor uafklaret.



REFERENCER

Alvez, Y., Le Yaouanq, M.-H., Carême, A., Chareyre, B., Cleirec, N., Gustin H., Guillemet, D. & Saint-Raymond C. (2005). *Collection Math'x: Seconde, Première S, Terminale S*. Editions Didier France.

Autour de Thalès (1995). Commission Inter IREM Premier Cycle.

Brousseau, G. (1995) Promenade avec THALES, entre la Maternelle et l'Université. In *Autour de Thalès*, IREM de Lyon Villeurbanne.

Hersant, M. (2005). *La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui*. Repères IREM N° 59, TOPIQUES éditions Metz

Robert, A. (2005). Quelles différences y a-t-il...? Exemples d'analyses didactiques d'exercices ou d'activités élèves (collège ou lycée). *Bulletin APMEP* 457, 226-238.

Web links

[<http://eduscol.education.fr/D0048/LLPPRC01.htm>]

[<http://www.cndp.fr/seconde/mathematiques>]

A.I.D. (Association pour l'Innovation Didactique) C.R.E.E.M. (Centre de Recherche et d'Expérimentation pour l'Enseignement des Mathématiques)

[<http://www.aid-creem.org/telechargement.html>]

C.R.E.E.M. var et specialcenter indenfor CNAM (Conservatoire National des Arts et Metiers) oprettet i 1972. I over 10 år var C.R.E.E.M. en foretrukket partner af undervisningsministeriet i ledelsen af "skoler og gymnasier", og senere i det, der var ansvarlig for udvikling af nye teknologier (DITEN, og derefter DISTNB). 26. Februar 2003 blev CREEM lukket endeligt. Det blev erstattet af "Foreningen til didaktisk udvikling"

Geoplan-Geospace

[<http://www.crdp-reims.fr/Ressources/lib/Titres-reseau.htm?produits/pdt118.htm>]

Geoplan-Geospace er et windows baseret matematikprogram beregnet til anvendelse fra grundskole til universitet. Geoplan-Geospace er et matematikprogram som giver mulighed for dynamiske og interaktive øvelser. Det giver brugeren mulighed for at definere og manipulere numeriske og geometriske objekter i et plan eller i rummet (punkter, lige linier, cirkler, kugler, legemer, konvekse polyhedroner, tal, transformationer, kurver, vektorer, numeriske funktioner, numeriske sekvenser, prototyper etc.). Disse kreationer og manipulationer kan automatiseres ved at tilføje nye kommandoer.

Cabri [<http://www.cabri.com/v2/pages/fr/index.php>]

Cabri II Plus er et værktøj til fremstilling af geometriske konstruktioner, som man gør på et stykke papir med blyant, lineal, passer og viskelæder. Softwaren giver disse konstruktioner nye dimensioner. Figuren og dets elementer kan frit manipuleres af brugeren og konstruktionerne bliver opdaterede med det samme. Konstruktionerne kan indsættes i andre dokumenter (under Mac, Windows) eller udgives på internettet (Cabri.Java).

Andet forløb

af Annette Jäpelt*

MÅL

For lærerstuderende:

- At udvikle en lektionsplan, der involverer dynamiske geometri programmer
- At lære, hvordan man bruger informationsteknologi i undervisningen.

For elever:

- At lære, hvordan man anvender et dynamisk geometri program
- At udlede sammenhængen mellem proportionalitet og ligedannede trekanter ved hjælp af et dynamisk geometri program.

FORSLAG

Først skal de studerende lære at anvende det dynamiske geometri program. Vi bruger programmet Geometer, en dansk version af Geometer Sketchpad. Gennem øvelsesopgaver bliver de studerende fortrolige med de mest almindelige funktioner i programmet indenfor klassisk geometri.

Derefter kigger vi på den idé, vi vil fokusere på: Forbindelsen mellem proportionalitet og ligedannede trekanter

Definition: To figurer er igedannede, når den ene af dem er en forstørrelse af den anden

De studerende ved, hvordan man anvender sammenhængen, men har ikke arbejdet uddybende med, hvilke sætninger, der faktisk gælder omkring dette. Efter forløbet med eleverne vil vi komme ind på disse sætninger, bevise og anvende dem. Dels sætning omkring multiplikation om et punkt, dels sætning omkring ligedannede trekanter:

Trekant ABC er ensvinklet med trekant $A'B'C'$.

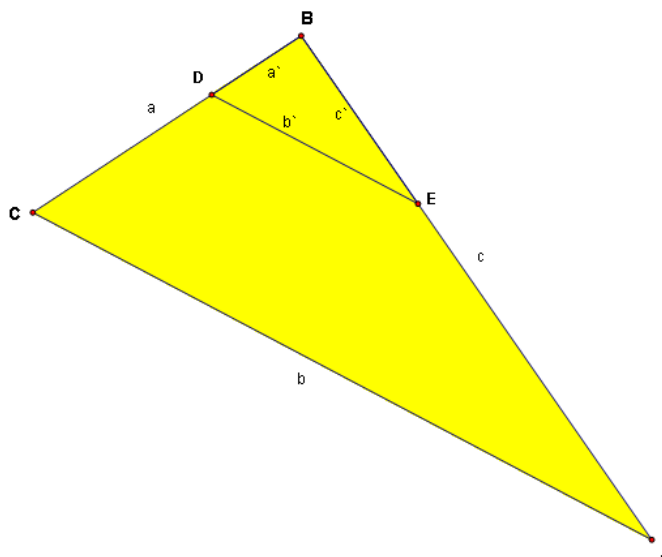
Trekant ABC er ligedannet med trekant $A'B'C'$.

Der er samme forhold mellem siderne i de to trekanter, altså:

$$a/a' = b/b' = c/c'$$

Så snart de lærerstuderende er blevet fortrolige med Geometer programmet og egenskaberne for ligedannede trekanter, er deres opgave at forberede en lektion for en skoleklasse. Målet med opgaven er, dels at introducere dem i programmet og dels til begrebet ligedannede trekanter.

* Skårup Seminarium, Danmark



Length of sides in the triangles

Triangle ABC	Triangle ADE
BC = 5,11 cm	BD = 1,70 cm
BA = 5,63 cm	BE = 1,88 cm
CA = 7,38 cm	DE = 2,46 cm

Ratio between the sidelengths in the triangles

$$\frac{BC}{BD} = 3,00$$

$$\frac{BA}{BE} = 3,00$$

$$\frac{CA}{DE} = 3,00$$

Angles in the triangles

Triangle ABC	Triangle ADE
$m\angle CBA = 86,66^\circ$	$m\angle DBE = 86,66^\circ$
$m\angle BCA = 49,62^\circ$	$m\angle BDE = 49,62^\circ$
$m\angle BAC = 43,72^\circ$	$m\angle DEB = 43,72^\circ$

Areas of the triangles

Triangle ABC	Triangle ADE
Area $\triangle BCA = 14,37 \text{ cm}^2$	Area $\triangle BDE = 1,60 \text{ cm}^2$

Ratio between the areas in the triangles

$$\frac{(\text{Area } \triangle BCA)}{(\text{Area } \triangle BDE)} = 9,00$$

Et forventet resultat

Forløbet slutter med dette efterfulgt af en evaluering.

Senere har de studerende en emneuge med matematik, hvorunder læreren har planlagt to dage med studium af proportionalitet i geometri.

INSTRUKTIONER FOR DE STUDERENDE

Inden starten af denne fase, har de studerende øvet sig i Geometer programmet som en introduktion til dets mere generelle anvendelse (operationer, tegninger, målinger og beregninger). Dette var kun ment som en øvelse, inden de lærerstuderende begynder at arbejde med forberedelsen af lektionen for eleverne.

Jeg gav de lærerstuderende følgende introduktion:

«Jeres mål for de næste to uger er, at være i stand til give en introduktion og lave et dokument, der gør eleverne i stand til:



- Tegne trekanter med Geometer programmet
- Lære om proportionalitet og lignedannede trekanter ved hjælp af det dynamiske geometriprogram.

De lærerstuderende arbejder i grupper, og hver gruppe laver et forslag. Hele teamet vælger så det bedste.

Denne opgave varer én uge (fire lektioner)».

Jeg har lovet klasselæreren i den klasse, hvori lektionen skal afprøves, at opsummere denne del. Hvis nødvendigt, vil jeg bruge en ekstra lektion på IT delen. Jeg vil lade eleverne bruge den matematiske viden, de allerede har til at gennemføre en realistisk øvelse, dvs. finde højden af et træ ved hjælp af konkrete målinger og dernæst lave beregninger ved at anvende egenskaberne for lignedannede trekanter.

Jeg vil også bede jer om at overveje andre situationer fra det virkelige liv, hvor eleverne kan anvende begrebet proportionalitet i praksis.

De studerende arbejder med Geometer i computerlokalet i forbindelse med lignedannede trekanter. De arbejder med at etablere egenskab 1 og 2 ovenfor.

Jeg foreslår, at de studerende gør følgende:

- Tegn en trekant ABC.
- Forøg eller reducer trekanten med en given faktor ud fra vejledningen i softwaren (resultatet vil være, at siderne bliver forøget/formindsket med en given faktor). I har nu en ny trekant ADE..
- Mål længderne af siderne i de to trekanter ABC og ADE,
- Find forholdet mellem længderne af de ensliggende sider i de to trekanter.
- Mål vinklerne i de to trekanter.
- Lad punkterne variere.
- Lad forholdet variere.
- Udled forholdet mellem siderne og vinklerne af de lignedannede trekanter.
- Mål arealet af de to trekanter og udled forholdet mellem arealerne.

I øvelsen ovenover ændrer vi først siderne og dernæst vinklerne.

Med den anden metode kan vi også gøre det omvendte, ved først at gøre vinklerne ens og så kigge på forholdet mellem ensliggende sider. Det vi gør her, er så at starte med parallelle sider og så finde ud af, at trekanterne er proportionale:

Udfør følgende ved hjælp af Geometer

- Tegn en trekant ABC.
- Tegn en linie i trekanten. Linien skal være parallel med én af siderne. F.eks. parallel med siden BC. I har nu en ny trekant ADE.
- Mål længden af siderne.
- Find forholdet mellem de ensliggende sider på de to trekanter.
- Lad dernæst punkterne og også den parallelle linie variere.



- Udled, hvad der gælder for de to trekanter.
- Mål arealet af de to trekanter og sammenlign forholdet mellem arealerne og forholdet mellem siderne.

Her er vinklerne ens og I ser, at længderne af siderne har et fast forhold. Hvis I har tid, kan I overveje, hvilke praktiske eksempler, der kan inddrages.

De lærerstuderende arbejder med disse punkter i to lektioner.

Læreren har valgt at lade hele gruppen instruere eleverne, da det vil være godt for de studerende både at forberede lektionen og instruere eleverne.

Eftersom eleverne skal sidde enkeltvis eller parvis ved computeren, vil det bedste være, at have én lærerstuderende ved hver computer.

Eleverne har endnu ikke anvendt matematikprogrammer, så det vil være fordelagtigt, hvis hver enkelt kan få personlig instruktion.

Endvidere vil de lærerstuderende få en god idé om, hvad eleverne kan forstå, når de senere skal undervise en hel klasse. Jeg håber også, at det vil opmuntre de lærerstuderende til at bruge IT i deres matematiklektioner, når de senere bliver lærere. En tærskel vil være overvundet, og de vil være mindre tilbageholdende med at bruge matematiksoftware, når de selv bliver lærere.

De lærerstuderende arbejder i grupper med at udarbejde forslag til lektionen med eleverne. Bagefter beslutter hele gruppen, hvordan lektionen skal gennemføres.

INSTRUKTION FOR ELEVERNE

Der er planlagt én lektion. Lektionen vil blive gennemført i computerrummet på Skårup Seminarium.

De lærerstuderendes instruktion til eleverne:

Lektion i proportionalitet.

Start programmet GEOMETER fra START

Afsæt 3 punkter: A, B, C

Forbind punkterne for at danne en trekant

Mål vinklerne i trekanten

Mål siderne

Multipliser med 2 fra punkt A. dvs. forlæng linierne fra punkt A (2:1)

Når linierne AB og AC forlænges, bliver de nye punkter omdøbt. Forbind disse to punkter for at danne en ny trekant.

Mål længden af siderne og vinklerne i den nye trekant

Kan I se nogen ligheder mellem de to trekanter?

Hvilke ligheder kan I se?

Kan I formulere en regel ud fra observationerne. Om nødvendigt, tegn flere trekanter for at eftervise reglen.



Find arealet af de to trekanter ($\frac{1}{2}$ højde * grundlinie)[‡]

Hvilket forhold er der imellem disse to arealer?

Nogle studerende vælger at arbejde mere individuelt, men de fleste valgte at følge de nedskrevne instruktioner.

FORLØB AF DE LÆRERSTUDERENDES LEKTION

To lektioner blev brugt på selvtest af øvelserne for lighedannethed.

De lærerstuderende nåede frem til forskellige erkendelser under disse to lektioner. Det er en fordel for alle at benytte IT, men nogle accepterede uden videre mediet og anvendte det, mens andre var utrygge og meget langsomme. Den største gruppe ligger dog imellem disse to yderpunkter.

Som før, blev de følgende to lektioner helliget forberedelse af lektionen for eleverne, og igen valgte hele gruppen det bedste forslag.

FORLØB AF ELEVERNES LEKTION

20 elever fra Øster Åby Friskole. De er ca. 14 år gamle.

Der er planlagt én lektion. Lektionen foregår i computerrummet på Skårup Seminarium. Eleverne har lidt kendskab til proportionalitet, men har aldrig anvendt matematik software.

Nogle af de lærerstuderende havde tidligere besøgt klassen i forbindelse med en lektion vedrørende mobiltelefoner. Klassens matematiklærer er tilstede under hele lektionen, men kun som observatør.

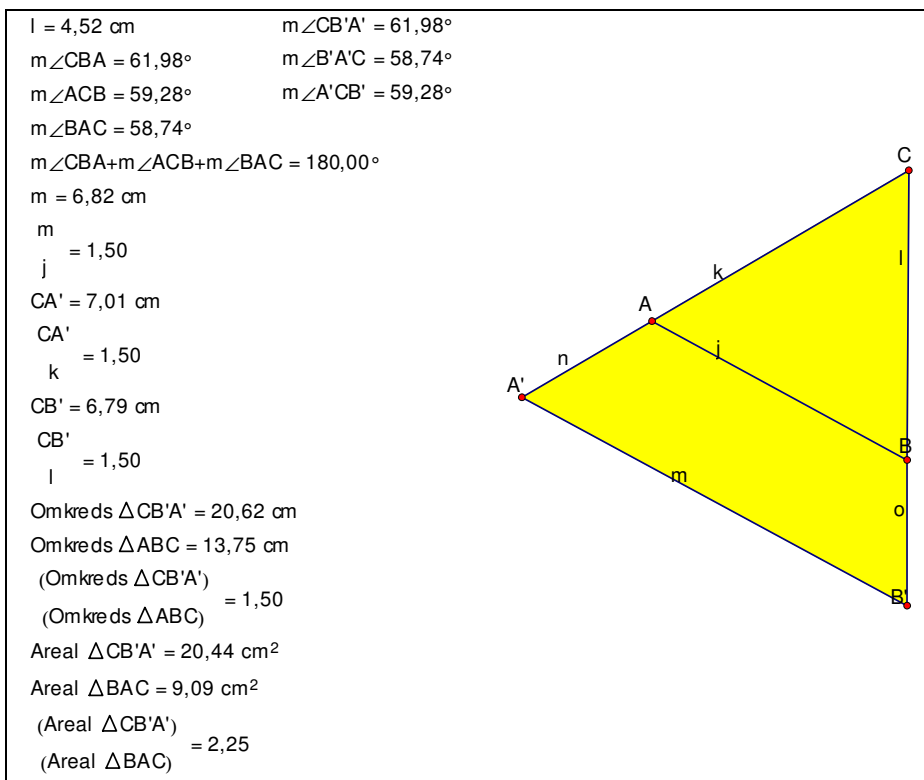
Eleverne arbejder enkeltvis eller parvis og der er mindst én lærerstuderende til at instruere dem ved hver computer.

Én af de lærerstuderende gav en kort velkomst og en introduktion til lektionen. Derefter startede eleverne med at arbejde med Geometer. De lærerstuderendes introduktion til eleverne kan ses under "Instruktion for eleverne",

Alle grupper gennemførte de beskrevne punkter. Samarbejdet mellem eleverne og de lærerstuderende fungerede godt. Generelt var eleverne meget engagerede i alle punkter, som krævede anvendelse af geometer programmet og de lærerstuderende var gode til at hjælpe dem.

Det lykkedes for nogle elever at udlede generelle konklusioner, men variationen i deres resultater var meget vide og fordi de studerende var opsatte på at få resultater, ledte de nogle af eleverne frem til de ønskede konklusioner. Efter lektionen afleverede eleverne deres arbejde.

[‡] Det er muligt at måle arealet uden at beregne den og jeg (seminarielæreren) finder dette meget bedre i dette trin, fordi fokus her ikke er på, hvordan man skal beregne arealer, men på proportionalitet.



Et eksempel på én af elevernes tegninger

Bemærkning: Eftersom alle beregninger foretages i programmet direkte på de målte værdier, er det nemt at få direkte sammenlignelige forhold uden hensyn til trekanternes position i forhold til hinanden.

FEEDBACK TIL DE LÆRERSTUDERENDE

Feedback fra klassens matematiklærer var, at han syntes det havde været en god lektion

Som grundlag for en dialog havde jeg lavet et evalueringsskema til de studerende. Evalueringsskemaet vises herunder med nogle svar indsat.

	Hvad var godt?	Hvad var dårligt?
Forberedelse af elevlektionen	Arbejde to og to, mange idéer fremkom, godt at udveksle/diskutere ideer. Den bedste måde at lære på. Finde ud af hvilke forkundskaber der kræves inden arbejdet med IT	
Elevernes læring	Interessant at opleve elevernes "aha" ved de overraskende erfaringer At de selv skulle arbejde med problemerne	For lidt plads i computerrummet. At der ikke var en computer pr. elev.



<p>Hvad har du selv fået ud af forløbet?</p>	<p>Fundet ud af, at jeg må lære mere om Geometer Fordybelse ved at bruge programmet i matematik Jeg fik selv en meget bedre forståelse for programmet, imens jeg brugte det til noget konkret.</p>	
--	--	--

KOMMENTARER

Den efterfølgende lektion med de studerende omhandler en teoretisk gennemgang af sammenhængen mellem proportionalitet og lignedannede trekanter. Normalt ville jeg nok vælge, at bevise sætningerne om lignedannede trekanter og proportionalitet uden nogen opdagelsesaktivitet, men i dette tilfælde er det blevet foreslået først at opleve egenskaberne igennem IT. Diskussionen vil i dette tilfælde dreje sig om rækkefølgen af aktiviteterne: Hypotese og bevis først eller eksperimenter gennem IT. Personligt tror jeg, man bør veksle. For de studerende er der ikke nogen entydig mening. Det ser ud til, at de yngre foretrækker IT-måden, mens de andre er lidt mere differentierede. En forklaring på dette kan være, at de yngre studerende ofte er mere fortrolige med IT.

Det har været meget frugtbart både for mig som lærer og for de studerende, at være så direkte involverede i planlægningen af en lektion og dens implementering i klassen.

Lærere på et seminarium er normalt mere involverede som vejledere end som deltagere i de studerendes praktik: Takket være erfaringerne fra dette projekt, vil jeg personligt bestræbe mig på at ændre dette. Det har været meget relevant at følge hele processen fra de studerendes første indlæring til undervisningen i klassen efter forberedelsen af lektionen. De studerendes engagement har været betragtelig og deres refleksion stor. Antallet af studerende, som er aktivt engagerede, stiger, når de kan se en direkte relevans af det de har lært. Det er stærkt motiverende straks at anvende det man har lært i praksis.

Jeg kunne ønske mig, at hele læreruddannelsen var baseret på en regelmæssig vekselvirkning mellem teori og praksis, hvor vi måske hver måned var i dialog omkring en konkret praktik

Efterfølgende

De studerende anvendte lignedannethed delvist til praktiske målinger

Eksempler på dette kunne være: bredden af en flod, erfare hvordan en skovarbejder måler højden af et træ, en tømrer måler hældningen af et tag, tværfaglighed med Fysik/Kemi mht. til afstande i universet og bestemmelse af bølgelængder, tværfaglighed med geografi med hensyn til målestoksforhold og kortlæsning.

Tak til

Tak til Øster Åby friskole, syvende klasse og deres matematiklærer, Brian M. Østergård. Ligeledes tak til mit matematikhold, 22.4 på Skårup Seminarium for deres imødekommenhed



REFERENCER

Hessing, S. (1987). *Landmåling anvendt matematik og geografi*. Forlaget Brøns ApS

Jensen, A. B. (2002). *Manual til Geometer*, L&R Uddannelse

Thygesen, H. (1998). *Geometri med integration af informationsteknologi*. Gyldendal undervisning.

Web links

The Geometer's Sketchpad [<http://www.dynamicgeometry.com/>]

Sketchpad er et dynamisk konstruktions- og udforskningsværktøj, som gør studerende i stand til at udforske og forstå matematik, på måder som simpelthen ikke er mulige med traditionelle værktøjer - eller med andre matematik software programmer. Med Sketchpad kan de studerende konstruere en genstand og så udforske dets matematiske egenskaber ved at trække genstanden med musen. Alle matematiske forhold bliver bevaret, så de studerende kan undersøge et helt sæt lignende tilfælde i løbet af få sekunder, hvilket på en naturlig måde leder dem til generaliseringer. Sketchpad fremmer en opdagelsesproces, hvor de studerende først visualiserer og analyserer et problem for derefter at gøre antagelser og forsøge at bevise dem.

Tredje forløb (på Universitetet i Bari, Italien) og konklusion

af Yves Alvez, Jean-François Chesné og Marie-Hélène Le Yaouanq

FØRSTE INDTRYK

Det gennemførte forløb har vist virkelig interesse, både fra de studerende og fra eleverne, i at anvende geometrisk software, uanset om de havde benyttet denne type software i forvejen eller ikke. De har også afsløret et behov for at sikre, at lærerne er tilstrækkeligt uddannede til at inddrage IT som et værktøj i arbejdet med deres elever.

Idéen var at gøre de studerende i stand til at anvende IT i klasseundervisningen og håbe, at på trods af mulige materielle besværligheder, ville deres første erfaringer være frugtbare nok til at anspore dem til at fortsætte. Dette mål blev nået nærmest i Créteil og Skårup.

DET TREDJE FORLØB

Temaet proportionalitet i geometri blev testet af lærerstuderende ved Bari Universitet ud fra forsøgsinitiativerne fra IUFM i Creteil og Skårup Seminarium.

Nedenfor findes en redegørelse for det gennemførte eksperiment ved Bari Universitet af R.I. Ancona og M.A. Giovinazzi.

Involverede klasser

To 7/8 grundskoleklasser (elever i alderen 12-13 år)

Scuola media statale "E. Fieramosca", Barletta (Ba) bestående af 23 elever.

Scuola media statale "A. Manzoni", Massafra (Ta) bestående af 25 elever.



Tidsfordeling, instrumenter og materialer

I planlægningsfasen forestillede vi os mindst 4/5 timer laboratorie-rettede aktiviteter (ved siden af matematikaktiviteterne i klassen). I den aktuelle gennemførelse blev der kun afsat 3 timer til laboratorie-rettede aktiviteter.

Ud over standard undervisningsmaterialet blev programmet "Geogebra" benyttet i klasse A og "Cabri II plus" i klasse B.

En foranalyse af de involverede klasser i undervisningsprojektet og planlægning af aktiviteten

I A klassen er der en bred vifte af evner, arbejdsklimaet er samarbejdsrelateret med en generel aktiv elevdeltagelse i kollektive diskussioner. Eleverne har gode computerfærdigheder, men ingen erfaring i at bruge dynamisk matematik software

I B klassen er gennemsnitsniveauet højere (kun to eller tre tilfælde af opfattelseshæmmede elever kan nævnes). Eleverne er ekspertbrugere i Cabri.

I begge klasser er temaet "forhold og proportionalitet" blevet introduceret og behandlet i ugerne op til eksperimentet.

Målet med eksperimentet var følgende:

- Observere effekten af at anvende interaktiv undervisningssoftware til undervisning i geometri i detaljer.
- Verificere om strukturering af passende opgaver gør os i stand til at observere det intuitive ræsonnement, som stimuleres ved brug af softwaren.

To trin relateret til planlægningen af den computerbaserede aktivitet, hvor de passer ind:

- Introduktion i Geogebra software (denne fase vedrører kun den ene af de involverede klasser, da den anden allerede er fortrolig med Cabri)
- Udlevering af en praktisk opgave relateret til "Opdagelse af Thales' læresætning

Typen af spørgsmål i det strukturerede skema varierer i forhold til deres natur og mål. Vi forestiller os:

- Spørgsmål for refleksion og test af softwarebaserede konstruktioner
- Spørgsmål for refleksion på de gennemførte dynamiske handlinger
- Spørgsmål på ikke formaliserede hypotetiske og spontane udledninger
- Checkspørgsmål på forudgående ræsonnementer efterfulgt af elevernes arbejde parvis.

Opgaven blev udleveret til eleverne parvis.

Analyse og refleksioner over eksperimentet

Brugen af interaktiv software og sammenligning:

Vi observerede ingen relevante vanskeligheder i nogen af klasserne med hensyn til de foreslåede konstruktioner. Elevernes begrænsede kendskab til Geogebra softwaren gjorde imidlertid, at de ikke kunne bruge softwaren til at beregne forholdet mellem



siderne, når de skulle udfylde tabellen med forholdet mellem siderne i de to trekanter. Dette førte dem til problemet med tilnærmelsesvise beregninger, hvilket til gengæld ledte dem til at finde "nærved" i stedet for "lig med" forhold. ("vi bemærker, at resultaterne af divisionerne ser ens ud")

Begge klasser er vant til at arbejde parvis, især i computerrummet. "Software ekspert" klassen viste større evner til syntese, hvorimod der i den anden klasse var et klart behov for at "beskrive" den mindste observation i mange detaljer. Diskussionerne var gode, især i par med en kognitiv forskel, som hverken var ekstrem høj eller lav.

Dynamiske aspekter ræsonnementer og opnåede konklusioner

I "ekspert" klassen understøttede brugen af Cabri ræsonnementer, det hjalp med at teste de intuitive ideer eleverne vurderede (for eksempel den idé mange havde og straks forlod, at "ligedannethed" mellem trekanter nødvendiggør "ens forhold mellem deres sider") I tilfældet med en line der skærer trekanten i et punkt D, er det eneste fremhævede aspekt en klar genkendelse af forskellige trekanter, uden refleksioner om forholdene mellem siderne.

Brugen af Geogebra gjorde eleverne i stand til at styre nogle geometriske forhold, men resultatet af beregningerne på lommeregnerne skabte forvirring. I opgaven blev eleverne bedt om at flytte punkt D mange gange og registrere forholdet, derfor var værdierne i nogle tilfælde "næsten helt" ens, desuden fokuserede opgaven igen på forhold, der skulle fremme en yderligere fase med kontrol af det forudgående ræsonnement.

I den afsluttende fase havde flere par en tendens til at checke forholdene, når de stødte på problemer med at indsætte en ny linie i trekanten ved D.

Refleksioner over hele eksperimentet

Dette eksperiment bekræfter helt, at brugen af dynamisk geometri software tilfører værdi til øvelsen, gør geometriske objekter dynamiske og bekræfter/reflekterer/konstruerer mentale billeder. Ikke desto mindre kan man ikke gennemføre den uden samtidig brug af instrumenter, der tillader kontrol af de intuitive tanker, som følger med den slags arbejde. Vi tror, at opgaven trods alt var et anvendeligt instrument ikke kun for at forstå alle de processer, der var i gang, men også fordi gennemførelsen involverede deling af ideer parvis. Hvad der helt manglede er en yderligere fase med fælles "deling" af ideer, når man udarbejder en "klasseopgave".

FORSKELLE

Der har imidlertid vist sig nogle forskelle mellem de forskellige partnere med hensyn til:

- Valget af software og tilhørende øvelser (software interfacet førte til konstruktion af figurerne på en bestemt måde, som influerede på ræsonnementer og læreprocesser)
- Målet med lektionen i klassen i forhold til matematisk indhold



- De krævede betingelser for implementeringen i klassen
- Graden af integration af IT i pensummet i de forskellige lande
- Betydningen af IT i læreruddannelsen
- Hvor fortrolige lærerne er med IT, hvordan de bruger det, både når de underviser deres elever, og når de underviser lærerstuderende.

Vurderingen af lektionen i klassen bekræfter fordelene ved at bruge dynamisk geometri software, men afslører også, at udelukkende kendskab til at bruge dem rent teknisk ikke er nok.

Eleverne skal undervises i, hvordan de skal studere de opnåede resultater, og hvordan de skal relatere dem til tidligere opnåede kundskaber, hvis de af sig selv skal drage relevante antagelser ud fra deres observationer.

SAMLET VURDERING AF ØVELSESINITIATIVET MED LÆRERSTUDERENDE.

De tre øvelsesinitiativer har fremhævet fire trin, som skal gennemføres i arbejdet med de studerende:

- Brugen af geometri software
- Udarbejdelse af en opgave for eleverne
- Implementering i klassen
- Mutualisering og analyse af de gennemførte eksperimenter

Det fremgår, at de fordele de studerende udleder af øvelsesinitiativet vil være meget større, når man kombinerer disse fire trin.

Udarbejdelsen af en elevopgave udgør et stærkt alternativ: Er det fordelagtigt for alle studerende i fællesskab at lave en opgave for eleverne, og hvis ja, på hvilket trin (før eller efter lektionerne i klassen)?

Spørgsmålet om forberedelse til enhver øvelseslektion er, om det er mere fornuftigt at starte med et dokument lavet af hver enkelt studerende og derfra udvikle det kollektivt under mutualiseringsfasen, eller at foreslå et kollektivt konstruktionsarbejde hen imod et fælles dokument.

At vælge at lave én fælles opgave for alle studerende inden lektionen i klassen resulterer i en mutualiseringsfase, som er nemmere at styre og lægger vægten af indflydelse på klassepraktikken over på elevernes aktiviteter. Det gør det imidlertid potentielt sværere for hver enkelt studerende at bruge dokumentet individuelt.

På den anden side, ved individuelt at udarbejde en elevopgave får hver studerende mulighed for at forberede hele hans/hendes lektion, hvilket derfor fremmer deres engagement og understreger deres ansvar i konstruktion og udvikling af lektionen, men leder dem ikke frem til en så omfattende analyse. Dette er endnu mere udpræget for en lektion, der involverer IT.

Det antages, at professionel undervisning bliver beriget af sameksistensen af alle disse forskellige typer scenarier.



Appendix: Elevernes opgave

MED COMPUTEREN: TREKANTER OG PARALLELOGRAMMER

Konstruktion af en trekant

Vi skal konstruere en trekant. Til dette skal vi bruge tre punkter.

Klik på *Create – Point – Free point – In the plane*

Du kan lave tre punkter A, B and C direkte.

A, B, C er der. Vi vil forbinde dem, så vi får en trekant.

Klik på *Create – Line -Polygon – Polygon by vertices*

Nu er trekanten T lavet. Dets hjørner er A, B and C.

Konstruktion af en linje parallel med en af siderne I trekanten

Vi vil tegne en linje d, som går igennem M på vinklen AB, parallel med linjen gennem BC.

Klik på *Create – Point – Free point – On a ray*. Vælg vinklen AB og marker punktet M

Klik på *Create – Line – Straight line – Parallel*. Vær sikker på at linjen går igennem M og er parallel med linjen gennem BC. Kald denne linje d.

Nu har vi to typer I et navn for punktet, hvor linjen d og AC skærer

Klik på *Create – Point – Intersection 2 lines*. Kald dette punkt N.

Now, click on the vertices of the triangle and on the line d and drag them.

Bestemmelse af længderne

Nu ønsker vi en bestemmelse af længden af nogle af linjestykkerne.

Klik på *Create – Display – Length of a segment*

Brug toolboxen Bis til at repetere denne procedure for at få længderne af AB, AC, BC, AM, AN and MN successivt. Få tallene med to decimaler. Skriv tallene i følgende tabel:

AM	AN	MN
AB	AC	BC

AM	AN	MN
AB	AC	BC

Hvilken sammenhæng kan du finde imellem tallene I tabellen?