

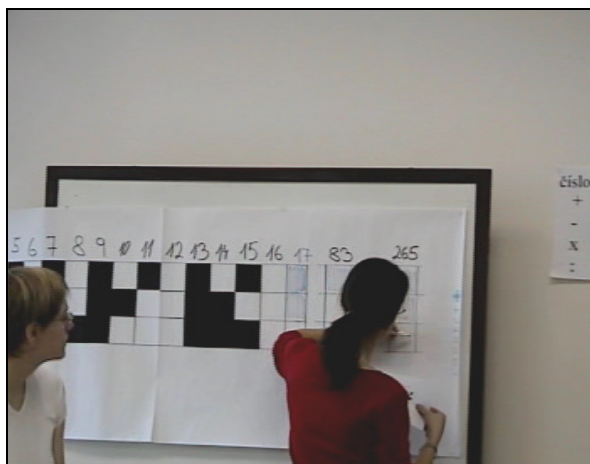
# PROBLEMER FRA DEN “VIRKELIGE VERDEN”

af Lucia Doretti\*

## INTRODUKTION

Vi synes, det er vigtigt, at lærerstuderende behersker både matematisk problemløsning samt udvælgelse og analyse af problemer. Samtidig er det vigtigt, at de kan fremlægge dem i klassen på en måde, der bedre stimulerer elevernes tankeproces. Lærerne må tage forskellige beslutninger om, hvordan de organiserer deres undervisning: Disse beslutninger relaterer sig til valget og systematiseringen af "gode" problemer, behandlingen af elevernes personlige løsninger i udvekslingsfasen (diskussion), og de mulige måder, hvorpå disse personlige løsninger kan udvikle sig hen imod ekspertløsninger, hvilket er hovedformålet. I denne sammenhæng bliver en foranalyse et af de professionelle værktøjer, der kan hjælpe lærerne med at formulere deres valg og beslutninger (Charnay, 2003).

"Problemer fra den rigtige verden" forslaget er en del af et sæt øvelser, som stimulerer arbejdet med problemer startende med en passende foranalyse til at identificere de aktuelle matematiske begreber, og beslutte hvor, hvordan og med hvilket formål de kan benyttes i undervisningen. Forslaget giver mulighed for at vælge mindst et af de foreslåede 3 sæt øvelser "Hvilken familie!"<sup>1</sup>, "Bizarre farver"<sup>2</sup>, "Forfølgelsen"<sup>3</sup>, taget fra the Rallye Mathématique Transalpin (RMT) - (Transalpin Matematik Rally).



\* Dipartimento di Scienze Matematiche e Informatiche, Università di Siena, Italien.

<sup>1</sup> 12<sup>th</sup> RMT, Test I - Year 2004

<sup>2</sup> 12<sup>th</sup> RMT, Test II -Year 2004

<sup>3</sup> 11<sup>th</sup> RMT, Test I - Year 2003

## Hovedafprøvning

af Lucia Doretti

### FORSLAGET

Forslaget "*Problemer fra den virkelige verden*" er det første af to inden for LOSSTT-in-MATH Projektet i Toscanas SSIS (Specialiserende Skoler for undervisning fra mellemtrinnet til gymnasiet), Center i Siena.

Ved SSIS er der et undervisningsmodul i problemløsning. I dette modul bliver lærerstuderende gennem erfaringer fra *Rallye Mathématique Transalpin* (RMT) ført frem til at opdage den centrale rolle problemløsningsøvelser spiller i elevernes matematikundervisning. Dette er en international matematiktest for både forskole- og grundskoleklasser baseret på problemløsning<sup>4</sup> (Jaquet, 1999). Nogle af SSIS lærerne er direkte involveret i arbejdet med testen, specielt begreber vedrørende udviklingsforskning (Crociani et al., 2001; Crociani, Doretti, Salomone, in press). Valget af RMT problemer skyldes deres karakteristika: At være relevante ud fra et matematisk synspunkt og forbinde de matematikprogrammer, der undervises efter i klasserne, til at motivere eleverne og stimulere deres involvering, at passe til de forskellige elevers trin i den kognitive udvikling, at give mulighed for en række strategier for beslutning og lejlighed til at udvikle børnenes måde at repræsentere et problem på.

I undervisningsåret 2004-05, involverede forslaget førsteårs SSIS studerende på naturvidenskabelige kurser, som studerede med henblik på at opnå undervisningskvalifikationer i matematik og naturvidenskab i grundskolen. Antallet af studerende var 15, ingen af dem havde en uddannelse i matematik.

Det blev besluttet at arbejde med problemet "Hvilken familie!", som kræver logik-deduktive evner, mere end specifik matematisk viden. Vi tror sådanne problemer kan få en god placering i den didaktiske undervisning, da de hjælper med at udvikle elevernes ræsonnement færdigheder.

### ***Hvilken familie!***

*Hr. og fru Beregning har 5 børn, hvis alder er forskellige lige tal. Summen af de tre døtres alder er 30 år. Summen af sønnernes alder er 14 år. Summen af de to ældste børns alder er 26. Summen af de 2 yngste børns alder er 10 år.*

*Angiv hvert enkelt barns alder og angiv om det er en dreng eller en pige.*

*Forklar dit ræsonnement og angiv alle mulige svar.*

Teksten med problemet bliver præsenteret for de lærerstuderende, som arbejder sammen i grupper. De bliver bedt om at diskutere og analysere problemet, lave en hypotese om repræsentationer, strategier og ræsonnementer, som eleverne kan bruge, samt mulige vanskeligheder og fejltagelser. Senere bliver problemet præsenteret i

<sup>4</sup> TMR's mål er udtrykkeligt: problemløsning, interaktivt arbejde, ansvarlighed i klassen, klar beskrivelse af anvendte procedurer til løsning af problemet, begrundelse for den valgte løsning

nogle klasser, hvor eleverne løser problemet gruppevis og sammenligner de fulgte procedurer. Øvelsen slutter i øvelseskurset med afrapportering af erfaringerne fra klasserne og en analyse af elevernes skrevne resultater, samt kommenteret af de lærerstuderende set i forhold til den tidligere gennemførte *foranalyse*.

## **Matematikemner, der skal udvikles: Problemløsning**

### **Mål**

#### *For seminarilærere*

- Stimulere brugen af undervisningsøvelser, hvor problemløsning spiller en central rolle i opbygningen af matematiske kundskaber.
- At vejlede lærerstuderende under foranalysen af et problem og den efterfølgende efteranalyse af elevernes skrevne resultater.
- At give vejledning og feedback.

#### *For lærerstuderende*

- At reflektere over problemløsningsøvelsen og på den rolle den spiller i elevernes matematikuddannelse
- At arbejde med problemer, som ikke kun kræver anvendelse af kendte procedurer, men personlig søgning, udvikling af strategier, formulering af formodninger, opfølgning og godkendelse.
- At lave en foranalyse af et problem inden det bruges i klassen for at kunne evaluere enten den matematiske opfattelse eller de vanskeligheder som kan opstå, at forudsæ elevernes strategier, fremstillingsmåder, vanskeligheder, hindringer og mulige fejltagelser.
- At observere eleverne, når de er engagerede i løsningen af et problem og arbejder i små grupper
- At reflektere over den fundamentale rolle kooperative og samarbejdende øvelser spiller i elevernes sociale, følelsesmæssige og kognitive udvikling
- At udvikle deres evne til at analysere elevernes arbejde ikke kun med hensyn til de begreber de bruger, problemer de møder eller fejltagelse de gør, men også med hensyn til deres forskellige følelser, konsekvensen og argumentationen i de svar, de giver.
- At reflektere over mulige afvigelser mellem forudsigelser i foranalysen og resultater i efteranalysen af elevernes arbejde
- At anvende de indsamlede informationer indsamlet både under foranalysen og under en efteranalyse af problemerne til at lave en hypotese om specifik lærerindgriben, hvis et aktuelt behov opstår.

#### *For grundskoleelever*

- At opnå ekspertise i problemer, som udgør en personlig udfordring, og som stimulerer både interesse i og motivation for matematiske øvelser



- At udvikle evnen til at arbejde i grupper og lære de grundlæggende regler i en videnskabelig debat: Frit at udtrykke ideer, formodninger, ræsonnable løsninger, at have gensidige udvekslinger, diskussioner, beslutninger, check og vurdering....
- At lære nye procedurer og repræsentationer via udveksling med andre
- At udvikle metakognitive evner gennem en refleksion af tankeprocesser, der styrer løsningsprocessen og tillader fremstilling af en begrundelse for svaret og grunden til valget af netop denne særlige løsning.
- At stimulere anvendelse af hypotetisk-deduktiv ræsonnering

### **Beskrivelse af øvelsen**

Øvelsen blev udviklet i tre faser. Første og tredje fase, hver med en varighed på 5 timer, involverede 15 førsteårs studerende ved SSIS, naturvidenskabelig specialisering, anden fase, som varede 2 timer, blev gennemført i en grundskole og blev gennemført af to af SSIS studerende.

#### Fase 1 (uddannelseskurset)

- Seminarielærere diskuterer betydningen af udtrykket problem, forskellige typer af problemer og deres anvendelse i undervisningen med de lærerstuderende.
- De lærerstuderende, som arbejder i mindre grupper, får udleveret teksten med et problem fra TMR, løser det og gennemfører en foranalyse på basis af givne opgaver.
- Hver gruppe præsenterer og kommenterer deres arbejde for de andre grupper og både løsningsprocedurerne og en gennemført foranalyse bliver diskuteret.
- En fælles foranalyse til problemet skrives ned.
- De planlægger en lektion i klassen, i hvilken eleverne skal arbejde sammen i små grupper for at løse problemet.
- To lærerstuderende bliver valgt og begge skal præsentere, styre øvelsen i en klasse og indsamle elevernes resultater.

#### Fase 2 (i grundskolen)

De lærerstuderende, som er tilstede i klassen

- Fremlægger og motiverer øvelsen for eleverne, som arbejder i små grupper
- Observerer arbejdet i én af grupperne gennem alle faser af problemløsningen
- Styrer den afsluttende diskussion om de fremstillede løsninger fra de forskellige grupper.
- Indsamler elevernes skrevne resultater

#### Fase 3 (uddannelseskurset)

- De to lærerstuderende beskriver deres oplevelser i klassen



- Lærerstuderende, opdelt i små grupper, analyserer alle elevernes resultater og noterer deres bemærkninger.
- Analyserne af elevernes resultater bliver diskuteret kollektivt og sammenlignet med foranalysen af problemet.
- Lærere og studerende reflekterer over og diskuterer mulige didaktiske ændringer, som kan hjælpe eleverne med at blive opmærksomme på de fejltagelser, de har gjort og overvinde problemerne.

## Opgaver

### a) Opgaver for lærerstuderende

- Hvilke forhold ved problemet kan fremhæves i sammenligning med klassiske lærebogsproblemer?
- Hvad er det matematiske indhold?
- I hvilke klasser kan problemet anvendes?
- Hvilke matematiske forestillinger kan blive vakt i eleverne?
- Hvilke fremstillingsmåder vil blive påvirket?
- Hvilke strategier kan anvendes?
- Vil eleverne være i stand til selv til at finde ud af, om de svarede rigtigt eller forkert?
- Hvilke vanskeligheder vil eleverne støde på, og hvilke fejltagelser vil de muligvis begå?
- Planlæg en klasseundervisning med en problemløsningsøvelse centreret om det analyserede problem, kommenter efterfølgende undervisningen og foreslå mulige ændringer.
- Sammenlign og kommenter elevernes løsningsprocedurer, og hvordan de blev retfærdiggjort.
- Hvilken type didaktisk indgreb kan hjælpe elever, som stødte på vanskeligheder eller anvendte forkerte fremgangsmåder?

### b) Opgaver for elever

- Opdel jer i små grupper og læs teksten med problemet omhyggeligt
- Udveksl ideer og samarbejd indenfor gruppen
- Forstå både informationen og spørgsmålene i teksten, vælg en fremgangsmåde og find en mulig løsningsstrategi.
- Check både de gjorte valg og de opnåede resultater
- Reflekter over den fulgte fremgangsmåde og skriv ræsonnementer ned
- Udveksl ideer og diskuter i fællesskab både de anvendte løsningsprocedurer og fremstillinger.

## Forløb

### a) I uddannelseskurset

Den første time diskuterede seminarielærerne betydningen af udtrykket problem med de studerende, herunder forskellige typer af problemer (problemer ved anvendelser, problemer til at skabe ny viden, problemer for fornøjelse til spørgsmål og svar) og deres forskellige mulige anvendelser i undervisningsprocessen.

Derefter præsenterede vi problemet "Hvilken familie!". De studerende arbejdede i grupper med 2 eller 3 studerende. Hver gruppe fik teksten med problemet udleveret sammen med opgaverne og nogle spørgsmål, de skulle besvare skriftlig. Disse spørgsmål havde til formål at hjælpe med indsamling af information om matematisk viden, måder at fremstille på, ræsonnementer, strategier, vanskeligheder og fejltagelser eleverne sandsynligvis ville støde på.

Lærernes mål var at lede de studerende til at reflektere over, hvor vigtig en rolle, en foranalyse af problemet spiller for bedre at kunne vurdere dets didaktiske potentiale og mulige anvendelse i klassen.

Hver gruppe var tildelt halvanden time til at overveje problemet, løse det, præsentere de fundne løsningsprocedurer ved hjælp af en overhead projektor og færdiggøre deres foranalyse.

Nogle gruppe forsøgte indledningsvis at løse problemet ved hjælp af algebra, ved at opstille et system af ligninger. "Ekspert" processer var privilegerede, da de var mere kendte af de studerende. De var dog ikke brugbare til løsning af problemet og heller ikke anvendelige i grundskoleklasser. Først efter at have genlæst teksten omhyggeligt kunne grupperne komme videre med den hypotetisk-deduktive eller kombinatoriske ræsonnering ud fra betingelserne i selve teksten. Mange blev forvirrede af det udtrykte krav om at indikere "alle mulige svar", som underforstået indikerede flere løsninger. Kun én gruppe var i stand til at finde de tre mulige korrekte svar, medens de andre grupper kun fandt et eller to svar.

Det forberedende arbejde med en foranalyse af problemet blev af alle grupper udført hurtigt og med syntetiske svar. Det generelle indtryk var, at de studerende ikke anerkendte denne øvelse som vigtig i sammenligning med løsningen af problemet, som de ofrede al deres energi. Nogle understregede deres vanskeligheder med besvarelsen af nogle af spørgsmålene og med forudsigelsen af elevernes adfærd.

Den efterfølgende fase, som varede omkring halvanden time, var afsat til at dele refleksioner samt kollektiv diskussion. Et medlem af hver gruppe fremlagde hele gruppens arbejde. Diskussionen centrerede sig om de forskellige måder at løse problemet på og på den ufuldstændige ræsonnering, som ikke førte til alle løsninger, men som førte til identifikation af andre forskellige procedurer. De studerende fremhævede især den undervisningsmæssige værdi i at fremsætte problemer, som har mere end én løsning i modsætning til den normalt anvendte model, hvor et problem nødvendigvis kun har en enkelt løsning.

I den efterfølgende debat blev de studerende ledt til at tænke på deres foranalyse og at reformulere en fælles formulering, som tog hensyn til de ting, der fremkom i den kollektive diskussion. Denne analyse er vist i tabel 1.

## Fælles foranalyse af problemet

*Hvilke begrebsmæssige fag er omfattet af problemet?*

Aritmetik – Logik – Kombinatorik

*I hvilken klasse eller klasser kan problemet anvendes?*

7. og 8. klasse

*Er der bemærkninger til teksten? Hvis ja, angiv dem og foreslå mulige ændringer.*

Teksten er klar, fordi den er opdelt i simple sætninger.

Den bør læses langsomt og omhyggeligt, da den indeholder mange betingelser..

*Hvilken matematisk viden kan eleverne møde eller styrke? Hvilke mulige nye kundskaber kan være påkrævet?*

Evne til at behandle mange betingelser samtidig.

Evne til at udvikle hypotetisk-deduktiv ræsonnering

Kombinatoriske evner (finde alle par og treheder af lige numre, som summeret giver en bestemt værdi)

*Hvilken type fremstilling, procedurer eller strategier kan eleverne tænkes at anvende, vurderet ud fra den baggrundsviden de formodes at have?*

At udtrykke data via symboler og skemaer, så de bliver bedre visualiserede og lettere at kontrollere.

Vi tror, at procedurerne er baseret enten på hypotetisk-deduktiv tænkning eller kombinatorisk ræsonnement (analog til dem de studerende anvendte) <sup>5</sup>

*Hvilke vanskeligheder kan eleverne tænkes at møde og/eller hvilken type fejltagelser kan de tænkes at gøre?*

Glemme nogle betingelser, fordi der er mange, der skal tages med samtidig

Stoppe ved den første løsning de finder, eller, hvis de gætter, at der er flere, stoppe ved den anden, uden at undersøge flere muligheder

Anvende algebraiske procedurer uhensigtsmæssigt [som de studerende selv gjorde]

*Fremhæv nogle uddannelsesmæssige værdier fra det pågældende problem*

Problemet har flere løsninger og passer til gruppearbejde, fordi det begunstiger samarbejde, udveksling og diskussion mellem enkeltpersoner

<sup>5</sup> *Eksempel på en løsning.* Udled fra de givne betingelser, at det mellemste barn skulle være 8 år gammel (44 - 36). Så får du, at den sandsynlige alder på de yngste børn er nødvendigvis 4 og 6 år. Så antager du, at det midterste barn er en dreng. Så er den anden dreng 6 og det yngste barn er en pige på 4 år. De to ældste børn er så piger og der er 2 muligheder for deres alder: 10 og 16 år gamle, eller 12 og 14 år gamle. Antag nu, at det midterste barn er en pige, så er de to ældste en pige og en dreng og det er de to yngste også. Eftersom en pige er 8, er summen på 22 tilbage for de to andre piger. Den eneste mulighed er  $22 = 6 + 16$ : Udled, at der er 3 mulige løsninger P16 P10 D8 D6 P4, P16 D10 P8 P6 D4, P14 P12 D8 D6 P4

Lærere og studerende benyttede derefter en time til at forberede et forløb i klassen, hvor eleverne skulle arbejde med problemerne parvis eller i små grupper for at fremme både udveksling og diskussion samt forsyne de studerende med et vist antal skrevne resultater vedrørende det samme problem.

Den studerende, som skulle være til stede i klassen under problemløsningen, skulle observere elevernes arbejde: Af den grund var det vedtaget, at de kun skulle fokusere på en enkelt gruppe og tage notater om de procedurer gruppen fulgte i forskellige faser.

Et observationsblad, vist i tabel 2, blev forberedt for denne type øvelse. Observationsbladet indeholdt nogle spørgsmål, som kunne være til hjælp under observationen.

### **Tabel 2 : Observation af elevernes arbejde**

#### *Fase for læsning og forståelse af problemet*

Hvem læser? Er der nogen diskussion under læsefasen? Hvor lang tid varer læse- og forståelsesfasen? Er der elever, der deltager aktivt og udtrykker deres synspunkter? Er der en leder i gruppen?

#### *Løsningsfase*

Holder gruppen sammen under løsningen af problemet, eller brydes den op? Er der udveksling i denne fase? Hvilken type udveksling? Er der elever, som ikke deltager?

#### *Valideringsfase og kontrol af de fundne svar*

Bliver løsninger diskuteret i gruppen? Hvordan? Er der en styring af processen? Hvordan finder de frem til en beslutning om det svar, der skal gives? Er der stadig en leder i gruppen?

#### *Fase med redigering af løsningen*

Hvordan og hvorfor valgte eleverne at redigere løsningen? Er det dem, der ikke skriver, der styrer processen?

#### *b) I klasseværelset*

To studerende var involveret i præsentationen af problemet i to 7. klasser, én med atten og én med tyve elever i alderen 12-13 år. De studerende møder eleverne for første gang. Under øvelsen, som varer i alt omkring 2 timer, er klasselæreren hele tiden til stede.

For at motivere eleverne præsenterer de studerende problemet som et matematisk spil og som en udfordring for klassen og beder dem danne nogle små grupper. Hver gruppe skulle læse problemet omhyggeligt, diskutere det, løse det gennem en fælles strategi og skriftlig forklare de ræsonnementer de fulgte. Hertil var der afsat 50 minutter. Hver gruppes arbejde skulle diskuteres og kommenteres kollektivt for at afgøre, hvem der levede op til udfordringen. Imens eleverne arbejdede, fokuserede den studerende på en gruppe, observerede og indsamlede informationer om dens måde at behandle de forskellige faser på. Til hjælp hermed var der udarbejdet specielle spørgsmål.





Øvelsen i klassen endte med en diskussion om de forskellige procedurer, de enkelte grupper havde anvendt og på de begrundelser, de havde benyttet. Dette ledte eleverne til at udtrykke deres bedømmelse af effektiviteten og/eller anvendeligheden af disse procedurer. Til sidst blev de skrevne ark indsamlet, så man senere kunne diskutere og kommentere dem i uddannelseskurset

### *c) I uddannelseskurset*

Øvelsen, som totalt set varede omkring fem timer, blev gennemført igen med hele gruppen af studerende. Dem, der have undervist i klasserne, fortalte om deres oplevelser til gruppen..

Disse fortællinger viste, at der var nogle små forskelle i måden de to grupper interagerede på, og som havde indflydelse på arbejdet og dets succes. Senere reflekterede de over vigtigheden af, at eleverne udvikler deres evne til at arbejde i grupper, hvilket betyder at være i stand til at udveksle ideer, at give ens eget bidrag og acceptere andres. Det blev også bemærket, at dette er svært at opnå, især hvis det ikke bliver stimuleret tilstrækkelig og brugt regelmæssigt.

Derefter delte de studerende sig i grupper og fik udleveret de skrevne notater fra klasserne. Hver gruppe undersøgte elevernes arbejde med hensyn til at nedskrive information om forståelsen af problemet, de anvendte strategier, gjorde fejltagelser og de vanskeligheder de stødte på, samt de afgivne forklaringer (for eksempel skelnen mellem fuldt og helt bevist svar og en simpel afprøvning af det fundne svar).

Den efterfølgende fase involvere udveksling af arbejdet, hvor hver enkelt gruppe præsenterede sine bemærkninger og diskuterede dem med de andre. I denne fase deltog de studerende på en meget aktiv og interessant måde. Foranalysen og diskussionen af problemet blev anerkendt at have givet en mere omhyggelig efteranalyse af elevernes skrevne ark: De studerende hævdede, at de var blevet ledt til at sætte sig selv i elevernes sko og prøve at tyde både deres "måde at ræsonnere på" og deres vanskeligheder.

Konklusionsdelen var en syntese af de bemærkninger, som var fremkommet under øvelsen.

### **Konklusioner**

Den oplevede praksis fik de studerende til at behandle en matematisk problemløsningsøvelse på et "virkeligt" problem og fremlægge den i en klasse.

I udgangspunktet blev det krævet, at de ikke bare accepterede problemet ukritisk, men skulle prøve på forhånd at evaluere hvilke vanskeligheder eleverne ville møde under løsningen af det, at definere hvilke forestillinger, repræsentationer og procedurer, som var involveret, og forudsige elevernes vanskeligheder og fejltagelser.

Vi bemærkede, at de studerende bevægede sig fra en indledende rådvildhed og undervurdering af det krævede arbejde til en progressiv bevidsthed om dets værdi, specielt da elevernes skrevne resultater blev analyseret og diskuteret,

På samme måde fremhævede de vigtigheden af valget om, at få eleverne til at arbejde i små grupper for at fremelske den stimulering en person til person udveksling kan give en diskussion og til sammenligning og udveksling af ideer og dermed til personlig udvikling.

Under øvelsen prøvede nogle af de studerende at ændre nogle af variablerne i problemet (numeriske data, opgaver, sammenhæng,...) og studere effekten af sådanne ændringer og efterfølgende muligheden for at bruge dem. Denne ide blev betragtet som en interessant måde at videreudvikle dette arbejde på.

## LITTERATUR

- Bertazzoni, B. and Marchini, C. (2005). Improving classroom environment by problem solving. In Novotna, J. (Ed.), *International Symposium on Elementary Maths Teaching, SEMT '05, August 2005*, 78-86
- Charnay, R. (2003). L'analyse a priori, un outil pour l'enseignant. In Grugnetti L., Jaquet F., Medici D., Polo M., Rinaldi M.G. (Eds). *Actes des journées d'étude sur le Rally Mathématique Transalpin, RMT: potentialités pour la classe et la formation*, ARMT, Dip. di Mat. Università di Parma, Dip. di Mat. Università di Cagliari, 199-213
- Crociani, C., Doretto, L., Grugnetti, L., Jaquet, F. & Salomone, L. (Eds.) (2001). *RMT: évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques*, Dip. di Mat. Università di Siena, IRDP di Neuchâtel
- Crociani, C. – Doretto, L. - Salomone L. (2006). Riflettere insieme agli insegnanti sul lavoro in classe con problemi del RMT: resoconto di un'esperienza. In Battisti R., Charnay R., Grugnetti L., Jaquet F. (Eds), *RMT: des problèmes à la pratique de la classe*, ARMT, IPRASE Trentino, IUFM de Lyon – Centre de Bourg-en-Bresse, 135-150
- Grugnetti, L. and Jaquet, F. (2005). A mathematical competition as a problem solving and a mathematical education experience. *Journal of Mathematical Behavior* 24, 373-384
- Grugnetti, L. and Jaquet, F. (in press). D'un concours de mathématiques à la formation des maîtres. *Rencontre COPIRELEM, Strasbourg, Mai-Juin 2005*
- Jaquet, F. (1999). Présentation du Rallye Mathématique Transalpin. In Grugnetti L., Jaquet, F. (Eds.), *RMT: Le Rallye mathématique transalpin. Quels profits pour la didactique?* Dip. di Mat. Università di Parma, IRDP di Neuchâtel, 16-20
- Medici, D. and Rinaldi, M.G. (2003). A teaching resource for teacher training. *CERME 3*, in [http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings\\_draft/](http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings_draft/)

## Web Links

### Transalpine Mathematical Rally

[<http://www.irdp.ch/rmt/>]

[<http://www.math.unipr.it/~rivista/RALLY/home.html>]

## Andet forløb

af Marie Hofmannová og Jarmila Novotná\*

Med det formål at lave et forløb under "LOSSTT IN MATH" forslagene, valgte vi nogle emner, som så ud til at være kompatible med indholdet af vores kursus. Øvelsen "Problemer fra den virkelige verden" blev valgt blandt et udvalg af tilgængelige forslag i projektet. Vi tror, at tekst problemer i almindelighed er mere anvendelige til den tilgang vi har valgt i Prag, dvs. undervisning i matematik via et fremmedsprog. Det endelige valg var de tjekkiske studerendes. Titlen er Bizar Farvning.

### FORSLAGETS GENNEMFØRELSE

**Titel:** *Bizar farvning*

**Original tekst:**

*Maxime udfylder et firkantet gitter. Reglen for farvelægning er forskellig i hver linie:*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

*Han har allerede udfyldt de første 15 kolonner. Han fastslår, at kolonnerne 1, 9 og 13 er helt fyldte. Han fortsætter med kolonne 16.*

*Bliver kolonne 83 helt fyldt? Og hvad med kolonne 265?*

*Forklar hvordan du fandt frem til løsningen.*

**Matematiske emner til udvikling:** *Løse tekstproblemer. Mønstre. Kombinere aritmetik, algebra, geometri, kombinatorik etc.*

### Mål

*For lærere*

- Vejlede de studerende fra teori til praksis
- Vejlede de studerende i at tilpasse lektionsplanen og undervisningsmaterialet til elevernes alder og niveau

---

\* Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická Fakulta, Tjekkiet.

- Give instruktioner og feedback

#### *For lærerstuderende*

- Matematik: Tekst problemløsning, generalisering
- Metodik: Udvikle materiale, som kan højne elevernes motivation.
- Tilpasse en lektionsplan
- Afprøve og teste de studerendes materiale, som kombinerer engelsk og matematik
- Enkeltundervisning
- Klasseundervisning

#### *For elever*

- Opleve undervisning af matematik på engelsk
- Opbygge opmærksomhed på opfindsomme og kreative indsatser for at finde en løsning
- Lave formodninger, træffe beslutninger, checke og eftervise resultater

## **FORLØB**

### *a) I uddannelseskurset*

Charles Universitetet i Prag, Fakultet for Undervisning, et frivilligt "Content and Language Integrated Learning" (CLIL) kursus, Matematik på engelsk som fremmedsprog.

10 studerende, 22-25 år, 2 seminarielærere, holdundervisning

Tidsplan: 45-minutters øvelseslektioner, 4 på hinanden følgende uger

### **En foranalyse af teksten**

- Diskutere de foreslåede problemer ud fra de mulige matematiske løsninger og pågældende sprog
- Vælg ét af de tre foreslåede problemer som grundlag for den videre bearbejdning (Bizar farvning)

### **Forberedelse af lektionen**

- Lærerne og de studerende diskuterer på tjekkisk, hvordan de bedst forbereder mikro enkeltundervisningen. De tildeler roller og forbereder første udkast til en lektionsplan
- Undervisning gruppevis på engelsk (dette trin blev videofilmet af én af lærerne): En fase af den foreslåede lektion bliver undervist af to studerende, de øvrige studerende spiller rollen som elever. En lærer tager notater på tavlen for videre diskussion.
- Reflektering og analyse (på engelsk) af øvelseslektionen. De studerende giver kritiske bemærkninger både til fremstillingen af problemet på engelsk og



gennemførelsen af lektionen. Nødvendigheden af at ændre opgaven for at tilpasse den til virkeligheden bliver fremhævet. De studerende forbereder frivilligt nyt undervisningsmateriale, som bedre passer til elevernes alder og interesse. Se resultatet som bilag.

### b) I klassen

Grundskole i Prag, en 45 minutters lektion i stedet for en engelsk lektion, 14 elever, 15-16 år gamle, en matematiklærer, en engelsklærer, to studerende, en seminarielærer - observatør

**Undervisning.** Denne fase blev videofilmet af én af seminarielærerne.

- Indledning. Lærerne styrer en isbrydende aktivitet "Navne gæt" - hvor man lærer hinanden at kende. Undervisningsmateriale: Firkantet gittermønster.
- Repetition af matematik terminologi, som er nødvendig for at gennemføre opgaven.
- Lærerne uddeler den oprindelige (RMT) udgave. Eleverne løser den enkeltvis eller parvis.
- Lærerne skifter fokus for lektionen (fra matematik til engelsk): De introducerer Maxime, figuren fra "Fashion World Magazine". De uddeler "Fashion World Magazine".
- Engelsk sprog. Lærerne checker elevernes lytte- og læseforståelse
- Matematik opgave: Eleverne løser spørgsmålene fra "Fashion World Magazine".
- Løsningerne sammenlignes med hele klassens.
- Lærerne laver konklusion over lektionen

### c) I uddannelseskurset

#### En efteranalyse - vurdering af lektionen

Diskussionen blev gennemført på engelsk. De diskuterede emner var:

- lektionsanalyse
- kommentarer
- kritiske bemærkninger
- forslag til alternativer

## LITTERATUR

Harmer, J. (1989). *The Practice of English Language Teaching*. Longman.

Novotná, J. (1999). Do students of the 3<sup>rd</sup> to 6<sup>th</sup> grades use the everyday life schemes when solving word problems? In Hejný, Milan and Novotná, Jarmila. *Proceedings SEMT 99*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, p. 159-163. ISBN 80-86039-86-2.

Pavesi, M., Bertocchi, D., Hofmannová, M. & Kazianka, M., on behalf of TIE-CLIL project. (2001). *Insegnare in una lingua straniera*. General editor: Langé, G. Milan.

**Tredje afprøvning (ved the Catholic University in Ružomberok, SK)**  
**og Konklusioner**  
 af Lucia Doretti

Temaet for forslaget fokuserer på problemer og problemløsning. På grund af dets kompleksitet og mange anvendelsesmuligheder kan det anvendes på mange måder afhængig af, hvordan man ønsker det skal indgå i den didaktiske praksis og i læreruddannelsen.

De forskellige synspunkter fremgår klart af rapporterne fra de forløb, som de forskellige partnere har gennemført. For partneren, som præsenterede forslaget, var fokus hovedsagelig på den didaktiske situation. I øvelsen med studerende, som arbejdede med "*Hvilken familie!*" problemet, var den centrale rolle tillagt en *foranalyse*, tilsat en efterfølgende *efteranalyse* af elevernes skrevne arbejde. De lærerstuderende skulle analysere problemet inden det blev forelagt klassen og bekræfte, ændre eller afvise ved at sammenligne de eksperimentelle data med det, de havde forudset i *foranalysen*. Den generelle linie i øvelsen, og måden den blev implementeret på, gjorde, at *foranalysen* blev opfattet som et professionelt værktøj, som kan hjælpe læreren med at orientere sig mellem sine mulige valg og de beslutninger, der skal træffes.

For de øvrige partnere i samarbejdet var det vigtigste aspekt at udtrykke sig sprogligt. Faktisk det naturlige indhold af "Content and Language Integrated Learning" (CLIL) kurset, som øvelsen blev implementeret under. Dette kursus krævede, at de studerende skulle arbejde med matematik på engelsk som fremmedsprog. Det var derfor nødvendigt at skabe en didaktisk situation, som passede til en formulering i sproglige termer, både for at motivere underviserne til at bruge engelsk og stimulere dem på den matematiske side. Under forberedelsen af lektionen arbejdede de studerende med teksten fra problemet *Bizar farvelægning*, og tilpassede dets indhold og opgaver. Den nye version adskiller sig fra den oprindelige i fantasi og originalitet: Ideen i en konkurrence baseret på en matematisk quiz er, at få store rabatter eller en gratis T-shirt, hvilket gør den problematiske situation meget konkret, det gør situationen meget tæt på det virkelige liv. Lærerne får derved et godt materiale til at stimulere og berige de lærerstuderende både lingvistisk (ved brug af engelsk) og matematisk (i denne udgave er begrebet mindste fællesnævner involveret).

Med hensyn til ikke-partner institutionerne, repræsenterede studiet af forslaget muligheden for at de studerende kunne arbejde med kompleksiteten i en tekst med et matematisk problem. De startede med en betragtning om, at en problematisk situation kan ses som en struktur, der indeholder adskillige indbyrdes beslægtede parametre. Viden om, hvad der er givet, har en effekt på, hvad der skal findes, og kan gøre løsningsarbejdet temmelig kompliceret på matematisk niveau, for de lærerstuderende, som skal udvikle det. I den implementerede øvelse blev de studerende ledt til at kreere en række tekstproblemer og evaluere sværhedsgraden af løsningsprocessen før forløbet med denne slags materiale med eleverne i klassen.

**Bilag: "Fashion World Magazine"**

# FASHION WORLD MAGAZINE

**SQUARES ARE IN**



**HIT OF THIS PRAGUE SPRING**

**Get superb discounts in our contest!**

More information inside!

## TO BE SQUARED = TO BE IN

It is a simple equation. If you want to be IN in the coming spring season, put on a squared T-shirt. According to reputable fashion designers, the season will be full of squares. In this edition of the Fashion World Magazine, you can order a T-shirt with any squared patterns you can imagine. In addition to this, you can get **great discounts**

or a **T-SHIRT GRATIS** ! Join our contest and win a **MAGNIFICENT T-shirt!**



Don't miss your chance and order a T-shirt. **Only now you can choose your own pattern!**

**Follow fashion, don't fall behind!**

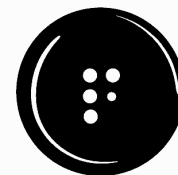


Advertising

**Visit the biggest shopping centre!**

**High discounts! Great Choice! The lowest price guaranteed! Favourable staff!**

**Londýnská 128, Prague 2, +420 298563128**

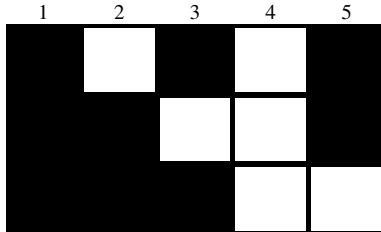


**THE FASHION CENTER**

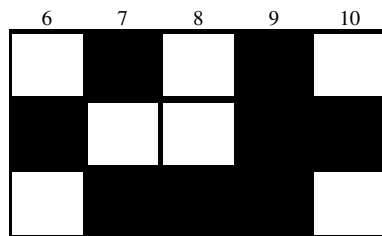


These patterns were prepared by our designers  
only for you.

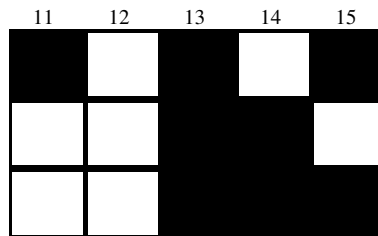
**PATTERN No. 1**



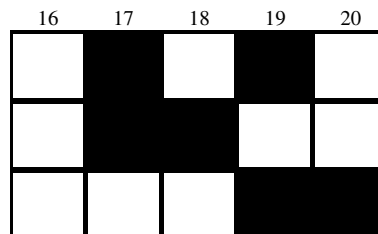
**PATTERN No. 2**



**PATTERN No. 3**



**PATTERN No. 4**



Show us your CREATIVITY and find **your own pattern**.  
 BUT DO NOT FORGET. **Your design must fit our offered SET!**

**And now a SUPERB OPPORTUNITY ONLY FOR YOU!**

Find the right answers to our quiz, fill in the information sheet, cut it off and send!

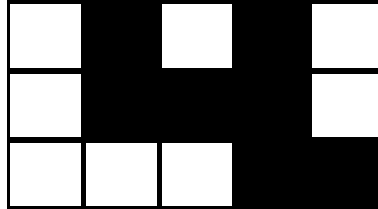
**Everybody wins!**

**EACH CORRECT ANSWER = 10% DISCOUNT**

**Quiz**

**Question No. 1**

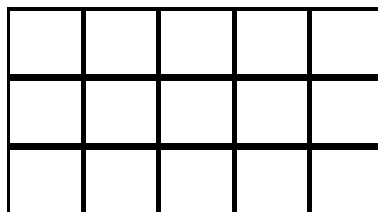
Is this a pattern from our set?



**Question No. 2**

If our catalogue contained all the other patterns, what would the pattern No. 16 be like? (Blacken the appropriate squares!)

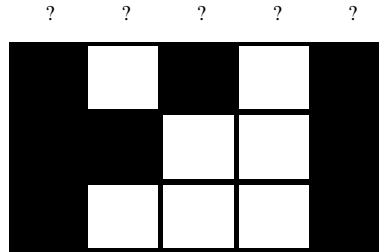
80    81    82    83    84





**Question No. 3**

What is the number of this pattern?  
(If there are more possibilities, write ALL of them!)



**Question No. 4**

Choose a pattern from the set and write the appropriate number.

**THOSE WHO SOLVE THE QUIZ QUICKLY  
WILL GET A FREE T-SHIRT!!!**

CUT OFF HERE

CUT OFF HERE

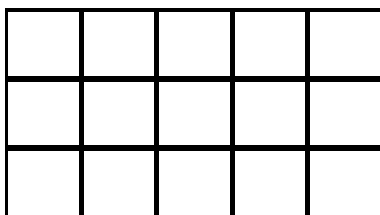
Name:  
Surname:  
Date of Birth:  
Country:  
Address:  
Telephone number:  
Your size:  
Colour: Green      Blue      Red      Grey      Black  
Pattern No.:

**Answer No. 1:**

Yes - No

**Answer No. 2:**

80    81    82    83    84

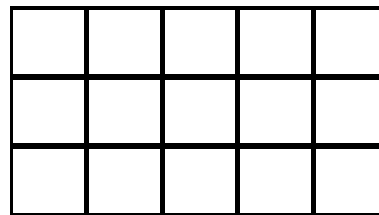


**Answer No. 3:**

It is the pattern number: \_\_\_

**Answer No. 4:**

I have chosen this pattern:



Its number is: \_\_\_

**GOOD LUCK!**

