LE TANGRAM EN MATHEMATIQUES AU COLLEGE

par Jaroslava Brincková, Miroslav Haviar* et Iveta Dzúriková**

PRESENTATION

L'apprentissage est le résultat d'une activité et il se développe aussi au travers d'une activité. Parmi les activités que les élèves pratiquent assez souvent figurent les jeux mathématiques. Si ces jeux sont menés selon des règles répondant à certains buts didactiques, on leur donne le nom de jeux didactiques dans le processus pédagogique. Les jeux didactiques comprennent divers puzzles géométriques, parmi lesquels figure un vieux puzzle chinois qu'on appelle le Tangram.

D'un point de vue pédagogique, le Tangram aide à l'enseignement de la géométrie en développant:

1. les connaissances géométriques,
2. le raisonnement,
3. l'imagination géométrique.

L'imagination géométrique est l'aptitude à percevoir intuitivement:

- les formes géométriques, leur grandeur et leur position dans l'espace,
- une forme donnée dans différentes positions spatiales,
- des changements de formes, en grandeur et en structure, etc.,
- une forme dans l'espace d'après sa projection plane et un terme descriptif,
- la représentation plane d'une forme donnée de l'espace.

* Pedagogická fakulta, Univerzita Mateja Bela, Banská Bystrica, République Slovaque.

** 8. ročné evanjelické gymnázium, Banská Bystrica, République Slovaque.

Le pilotage principal

par Jaroslava Brincková et Iveta Dzúriková

Il est possible, dans l'enseignement de la géométrie, de mener diverses activités qui renforcent l'imagination géométrique par une modélisation avec un Tangram-papier quadrillé E_2 (plan) ou un Tangram-kit, prêt à assembler, E_3 (espace).

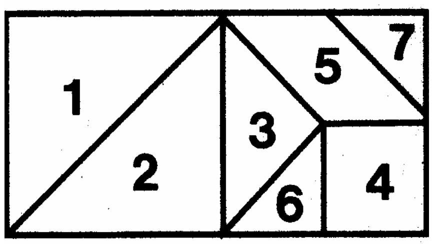


Figure 1: Pavage

Règles d'utilisation du Tangram

Chacune des sept pièces du Tangram doit être utilisée lors de la création de quelque forme que ce soit.

Les pièces du Tangram ne doivent jamais être superposées.

Toutes les pièces peuvent être utilisées retournées si nécessaire.

Dans l'enseignement de la géométrie, les pièces du Tangram-kit, prêt à assembler, peuvent essentiellement être utilisées de deux manières:

Pour modeler une forme donnée prescrite – ici une imagination constructive, la perception intuitive des formes géométriques et de leurs propriétés peuvent bien s'exercer; un enfant perçoit intuitivement une surface.

Pour remplir avec des pièces une surface délimitée – il existe ici trois possibilités:

- La forme est définie par ses contours.
- Tous les points de la forme sont d'une même couleur – une forme pleine.
- La forme se situe dans un quadrillage carré.

Quand la modélisation se fait à partir d'une forme donnée prescrite, les élèves doivent d'abord comparer les contours des formes, ensuite choisir la pièce du Tangram correspondante et la poser convenablement orientée dans la forme créée. Les élèves imaginent des formes géométriques, leur grandeur et leur position dans l'espace, la même forme dans différentes positions spatiales, etc.

En remplissant une surface délimitée avec des pièces, on distingue différents niveaux de difficulté. Ainsi que le montrent les recherches, les élèves des niveaux inférieurs ne perçoivent pas le carré quadrillé comme un outil les aidant dans leur travail avec les rectangles, mais le perçoivent comme un environnement à deux couleurs, donc comme un papier avec des figures. Ils doivent apprendre petit à petit à "percevoir" les parallèles et les perpendiculaires. Ils réussissent beaucoup mieux dans leur travail quand la forme donnée est définie par ses contours.

Dans l'enseignement de la géométrie au collège, le Tangram peut être utilisé pour diverses tâches motivantes, pour travailler avec les surfaces, les périmètres, les axes de symétrie, et les similitudes des formes, pour démontrer le théorème de Pythagore et pour présenter les nombres rationnels. Il contribue aussi à l'utilisation des isométries en géométrie. En revanche, ce n'est pas l'outil idéal pour enseigner les concepts géométriques car il ne comprend qu'un seul des sept types de triangles (le triangle rectangle isocèle), deux quadrilatères (le carré et le parallélogramme) et ne contient pas de cercle.

L'idée principale

L'influence d'une aide pédagogique, d'une seule couleur ou multicolore, sur l'efficacité du travail des élèves. Développement de l'aptitude à percevoir le contour et la surface d'une forme plane non-convexe.

L'influence d'un environnement graphique (papier quadrillé, papier coloré, papier blanc) sur la capacité à projeter un modèle donné sur un dessin plan. Découvrir le périmètre et l'aire des différentes pièces du puzzle.

Titre: *Le Tangram pour mesurer le périmètre et l'aire*

Thèmes mathématiques à développer:

Mesurer des formes planes en utilisant une unité de mesure non standard

Description de l'activité:

L'objectif général de cette proposition est de faire réfléchir les professeurs stagiaires à l'importance que les activités-problèmes de mesure peuvent avoir dans le développement mathématique des élèves. Nous utilisons le jeu du Tangram dans les séminaires pour préparer les stagiaires à enseigner la géométrie aux élèves de 11 à 14 ans (c'est à dire au collège). Le but principal est de développer la pensée créatrice et l'imagination géométrique des élèves. Notre objectif est également de préparer une activité en classe dans laquelle nous abordons les concepts de périmètre et d'aire dans différents contextes. Nous souhaitons utiliser le Tangram pour illustrer les transformations isométriques en mesurant le périmètre et l'aire.

Nous portons particulièrement notre attention sur les objectifs partiels suivant:

Clarification didactique de la séquence des étapes dans la modélisation des termes géométriques de périmètre et d'aire des formes planes*: perception – modélisation – dessin-plan – mesure – dérivation de relations fonctionnelles.*

Description des niveaux de la pensée géométrique par van Hiele[1], portant une attention particulière à la déduction de relations fonctionnelles en utilisant des termes géométriques.

Modélisation du monde des nombres et des formes en utilisant un segment de droite comme unité.

Etablir des relations entre le périmètre et l'aire de différentes formes.

Uniquement pour les élèves âgés de 14 ans: mesurer les tailles de différentes formes et calculer leur périmètre et leur aire en appliquant aussi le théorème de Pythagore ou en utilisant des expressions algébriques.

Objectifs:

Pour les élèves

Combiner l'utilisation de l'arithmétique, de l'algèbre et de la géométrie dans des activités données.

Utiliser les puzzles-Tangram pour la modélisation et la mesure du périmètre et de l'aire en géométrie plane.

Faire des conjectures, prendre des décisions, contrôler et vérifier les résultats.

Pour les professeurs stagiaires

En Mathématiques: Etudier différents problèmes de la mesure en géométrie. (pour établir des relations entre les nombres et les formes).

En Méthodologie: Travail en groupes - développement de matériel didactique pour accroître la motivation des élèves. Tester les matériaux, 4 phases:

- perception, modélisation et dessin
- définition de concepts et mesure
- procédure de composition et de décomposition.

Pour les formateurs

Aider les stagiaires à adapter le plan de la leçon et les matériaux pédagogiques à l'âge, au niveau, aux besoins individuels des élèves, et à la responsabilité du choix des tâches, etc.

Donner des instructions et un feedback.

Les tâches*:*

Pour les professeurs stagiaires

[1] Van Hiele, P.M.: Structure & Insight. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1983

Perception, modélisation et dessin

<u>*Tâche no 1*</u>: Les professeurs stagiaires se familiarisent avec les règles du jeu Tangram. Ils dessinent les pièces du jeu sur du papier selon la Figure 1. Les professeurs stagiaires préparent 2 versions du jeu, *coloriée et non coloriée*, ce qui signifie que dans la version non coloriée ils ne colorient pas les formes géométriques 1-7 et dans la version coloriée ils utilisent des couleurs différentes pour les formes avoisinantes. Ils découpent les pièces du Tangram pour les deux versions. Les professeurs stagiaires utilisent les pièces des deux versions du Tangram séparément pour construire les différentes *Images du Puzzle* de la Figure 2.

Les professeurs stagiaires utilisent toutes les pièces du Tangram pour créer les différentes formes de la Figure 2 ainsi que d'autres comme, par exemple, une fille, une bougie, etc.

Ils copient (dessinent à la main) chacun des modèles créés en deux versions (non coloriée vs. coloriée) sur trois feuilles de papier différentes: blanche, quadrillée et couleur.

Les professeurs stagiaires discutent de l'influence que les différents environnements de fond des feuilles de papier ainsi que les différentes versions du Tangram ont sur la capacité à copier la forme exacte des images du puzzle créées avec les Tangrams.

Ensuite les professeurs stagiaires discutent de l'influence que les différentes pièces coloriées ont sur la capacité à percevoir le contour de la forme. Ils devraient aussi noter les différentes influences des deux versions du Tangram (non coloriée vs. coloriée) sur la capacité à voir les contours des images dessinées.

Lors de l'étape suivante, les professeurs stagiaires discutent du potentiel du jeu de Tangram pour enseigner la classification des quadrilatères aux élèves âgés 11-14 ans.

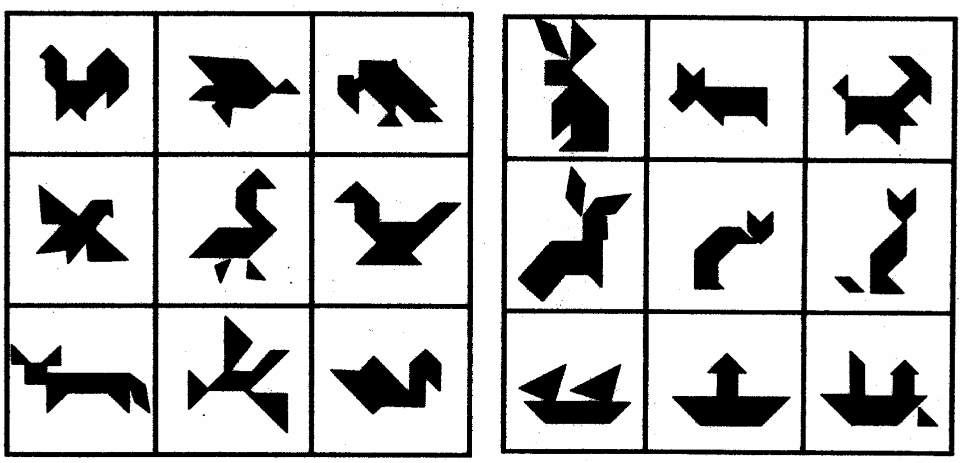


Figure 2: Images du Puzzle

Définition des concepts et mesure

Tâche no. 2: (Voir également cartes des termes – La mesure en fichier attaché 1 ou sur le site web slovaque www.zoznam.sk/katalogy/Vzdelavanie/Slovniky/) Les professeurs stagiaires découvrent dans un thésaurus la signification des concepts de périmètre et d'aire dans différents contextes. Ils étudient les concepts de périmètre et d'aire dans différents contextes (géographie, littérature, électrotechnique, éducation civique, dessin, géométrie, …). En menant cette activité, nous voulons souligner le fait qu'en mathématiques le périmètre est considéré comme la *longueur d'une courbe fermée* déterminée par le couple (ordonné) [nombre; mesure] et non comme le contour (surface) d'une forme plane.

Procédure de composition

On peut utiliser deux unités – l'une étant le côté du carré 4 (on l'appellera *c*), l'autre l'hypoténuse du triangle 7 (on l'appellera *h*).

Nous montrons que, étant donné un *périmètre (surface),* on peut réaliser, selon les instructions, des formes planes avec une surface différente (périmètre).

Tâche no. 3: A partir de deux triangles isométriques du Tangram (c'est à dire à partir de soit 1 et 2, soit de 6 et 7), construire des formes planes de façon à identifier les côtés de même longueur. Dessinez les solutions construites dans votre cahier d'exercices. Exprimez le périmètre des formes obtenues en utilisant les unités de longueur c et h.

Tâche no.4: A partir du carré 4 et des deux triangles 6 et 7 d'un Tangram, réalisez des formes planes de façon à identifier les côtés de même longueur. Trouvez toutes les solutions et classez les selon le périmètre, selon le nombre et la grandeur des angles et selon les côtés parallèles.

En assemblant les formes, les élèves peuvent constater qu'un côté du triangle est plus long que le côté du carré. Cela crée donc la possibilité d'une discussion intéressante et utile sur le plan didactique – qu'allons nous faire? Supposons qu'il ne nous soit pas permis de mesurer – comment classer les formes? Quelles sont les formes qui ont le même périmètre?

On peut utiliser deux unités – c et h. Ainsi, les périmètres sont: A fait 6c, B fait 4c + 2h, C fait 4c + 2h, … etc. (en fait, vous pouvez constater que toutes les formes font 4c+2h, à l'exception de la forme A.) Cela nous motive à utiliser les symboles (c,h) pour résoudre un problème et cela aboutit aussi à la question suivante:

Quel est le périmètre de toutes les autres formes du Tangram?

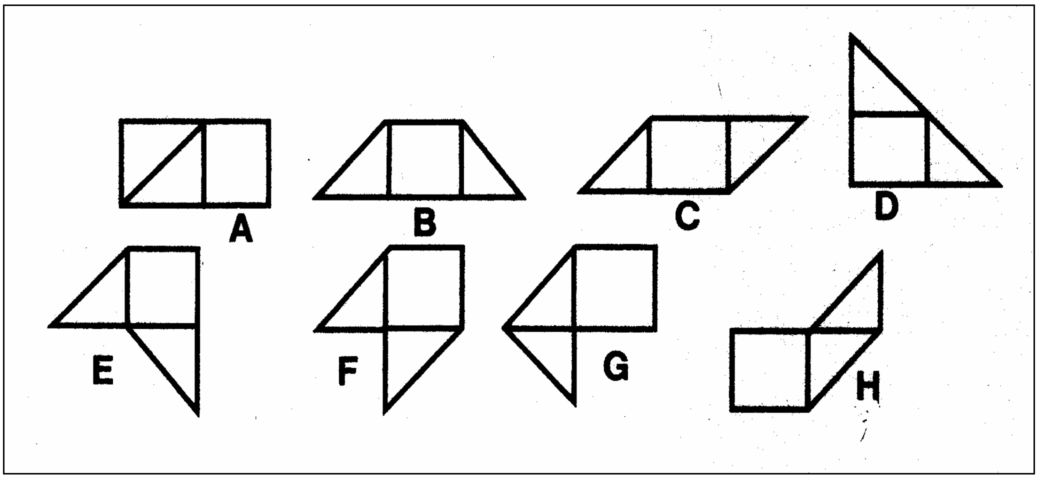


Figure 3: Résultats

Procédure de décomposition

Tâche no.5: Les étudiants assemblent toutes les pièces du Tangram et créent: a) un triangle, b) un carré, c) un rectangle. Observez attentivement et trouvez les différences entre les puzzles non coloriés et les puzzles coloriés.

Tâche no.6: Créez des triangles à partir de 2, 3, 4, 5, 6 et de toutes les pièces du Tangram coloriées. Dessinez les modèles coloriés. Trouvez toutes les solutions composées de cinq pièces.

Tâche no.7: Une petite fille Barbara a créé un pentagone. Observez l'image 4 et formez en une autre à partir des pièces numérotées 3 et 5. Quelles autres pièces du Tangram vous faut-il pour créer la même forme? Une solution consiste à utiliser les pièces 4, 6, 7. Trouvez toutes les autres solutions.

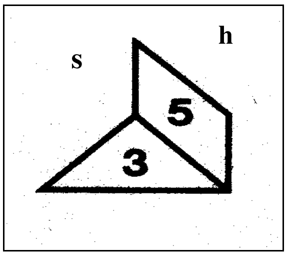


Figure 4: Un pentagone

Aire et périmètre des formes planes

Tâche no.8: Créer toutes les formes possibles à partir des triangles 6 et 7. Si l'unité des pièces du Tangram est la longueur du côté du carré c et l'hypoténuse des triangles est h, étudiez les relations entre le périmètre et l'aire.

Il n'est pas nécessaire de connaître la hauteur des triangles ni de mesurer la surface pour classifier les formes. On peut utiliser une unité d'aire - T (l'aire du triangle 6 ou 7). Toutes les formes ont la même aire – 2T.

<u>Tâche no.9</u>*:* Créer les formes de la Figure 3 à partir des triangles 6 et 7 et du carré 4 du Tangram. Comparez leurs périmètres et leurs aires.

<u>Tâche no.10</u>*:* Si l'unité d'aire est celle du plus petit triangle du Tangram - T, trouvez les aires des différentes pièces du puzzle.

Tâche spéciale

Un garçon, John, a placé le triangle du milieu numéroté 3 dans le coin de l'angle droit du grand triangle du Tangram numéroté 1, comme le montre la figure 5. Calculez l'aire du nouveau trapèze ainsi créé (colorié en bleu) en utilisant les unités c et h. *(Devrait-elle être la même que celle du triangle 3?)* Exprimez l'aire en cm^2: la longueur du petit côté du triangle no. 1 est de 6 cm et la longueur de l'hypoténuse est $6\sqrt{2}$ cm.

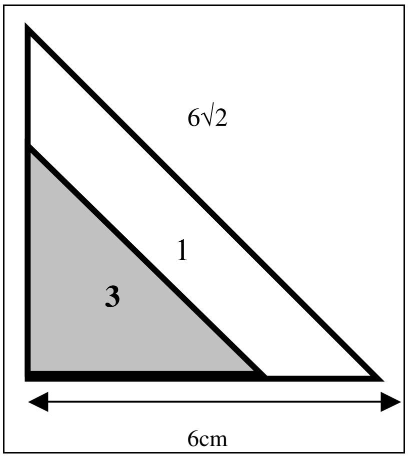


Figure 5: Triangle

Pour les élèves

Les élèves dessinent sur du papier les pièces du jeu, qui sont dans la Figure 1. Ils préparent deux versions du jeu, une *coloriée* et l'autre *non coloriée*, ce qui signifie que pour la version non coloriée ils ne colorient pas les formes géométriques 1 - 7 et pour la version coloriée ils utilisent des couleurs différentes pour les formes avoisinantes. Ils découpent les pièces pour les deux versions du Tangram. Les élèves utilisent les pièces des deux versions du Tangram. (coloriées et non coloriées) séparément pour construire les différentes *images de puzzle* de la Figure 2 et pour se familiariser avec les règles du jeu de Tangram.

Ils copient (dessinent à la main) chacun des modèles créés dans les deux versions (coloriée et non coloriée) sur trois feuilles de papier différentes: blanche, quadrillée et colorée. Ensuite les élèves discutent de l'influence que les différents environnements de fond des feuilles de papier ainsi que les différentes versions du Tangram ont sur la capacité à copier la forme exacte des images du puzzle créées avec le Tangram.

Les élèves discutent de l'influence que les différents environnements de fond sur lequel les images sont dessinées ont sur la capacité à en voir les contours. Ils devraient aussi remarquer que chaque version du Tangram (coloriée vs non coloriée) influe différemment sur la capacité à voir les contours des images dessinées.

Au cours de l'étape suivante, les élèves créent un chat, un chien, un lièvre en utilisant toutes les pièces du Tangram et discutent du potentiel du jeu de Tangram pour enseigner la classification des quadrilatères.

Ils apprennent les concepts mathématiques en anglais: base, hauteur, hypoténuse, angle droit, perpendiculaire et (dans le cas du Tangram) les triangles isocèles, et les notions de transformation: symétries, rotation et translation.

Ils expliquent les termes périmètre et aire dans différents contextes.

Ils savent utiliser deux unités – l'une étant le côté du carré 4 (appelons le c), l'autre l'hypoténuse du triangle 7 (appelons le h). Ils découvrent que, étant donné un *périmètre (surface),* il est possible de construire, suivant les instructions, des formes planes avec une surface différente (périmètre).

Les élèves créent des modèles à partir des tâches no. 3 et 4. Créer toutes les formes possibles en assemblant les côtés de même longueur. Ils discutent en groupes du nombre de solutions à ce problème.

Si l'unité d'aire est celle du plus petit triangle du Tangram - T, trouver l'aire des différentes pièces du puzzle.

Faire des conjectures, prendre des décisions, contrôler et vérifier les résultats.

Les tâches no. 6, 7 et la tâche spéciale sont un bonus/en supplément pour les meilleurs élèves, à faire en travail individuel.

Pour les formateurs

Aider les stagiaires à adapter le plan de la leçon et les matériaux pédagogiques à l'âge, au niveau, aux besoins individuels des élèves et à la responsabilité du choix des tâches, etc.

Fournir des instructions et un feedback.

Conclusion

Cette proposition a été conçue pour les professeurs stagiaires de mathématiques, de la 6^{e} à la 9^{e} année d'école obligatoire (11- 15 ans) ou de premières années de lycée et aussi en partie obligatoire du cours de didactique des mathématiques.

Le lieu: Université Matej Bel, Faculté d'Education, Banská Bystrica.

Les formateurs: L'équipe pédagogique est constituée de professeurs d'université, 1 formateur, 2 professeurs de mathématiques et un professeur d'anglais.

Les stagiaires: 18 futurs professeurs en cours de didactique des mathématiques.

Emploi du temps – 2 leçons par semaine

Semaine		Activités
1.	Etudiants	Préparer le Tangram – colorié et non colorié. Connaître les règles et les utiliser pour travailler avec le puzzle du Tangram. Clarifier les termes géométriques en utilisant la carte des termes en fichier attaché 1 – La mesure.
	Devoir	Motivation pour la classification des quadrilatères. Utilisation de l'internet pour les recherches. Travail en groupes de deux pour élaborer le plan de la leçon.
2.	Etudiants	Discuter des différentes procédures de résolution en groupes de deux ou plus. Présenter les différences sur le tableau en couleur. Créer des cartes de termes. Utiliser la terminologie correcte dans différentes matières scolaires (Slovaque, Physique, Dessin, Sciences, Jeux, etc.). Effectuer une analyse critique des présentations des plans de la leçon.
	Devoir	Finir le plan de la leçon en utilisant des liens interdisciplinaires. Effectuer une analyse des objectifs pédagogiques. Ecrire les étapes pédagogiques et les tâches pour les élèves dans le plan de la leçon.
3.	Etudiants	Vérifier le plan de la leçon. Préparer la discussion finale sur les séquences du plan de la leçon. Préparation des 2 stagiaires qui vont enseigner dans une classe. Les autres étudiants commentent et vérifient + préparent le film vidéo.
	Devoir	Analyse des séquences prévues. préparer une leçon pour les élèves qui n'ont pas compris les matériaux du professeur.
4.	Etudiants	Les étudiants et le professeur regardent le film vidéo et analysent la leçon en se concentrant sur la communication professeur-élève. Le formateur évalue les stagiaires et fait des commentaires sur leur travail créatif.
	Devoir	Créer votre propre logo pour le cours de Didactique des Mathématiques en utilisant un Tangram.

Mise en oeuvre des séquences de la proposition

Mise en oeuvre en classe

Lycée Evangélique de Banská Bystrica, Skuteckého 5. Il comprend 8 années de collège et de lycée, classe de quatrième, élèves de 12/13 ans, nombre d'élèves 21. Mathématiques en Anglais, Géométrie en Anglais, Deux professeurs – d'anglais et de Mathématiques.

Les professeurs enseignent à tour de rôle. Filmé en vidéo par un étudiant de la classe.

Ecole Primaire Amos à Martin, Východná, classe de $5^{ème}$, enseignement alternatif de Maths et de Sciences. Nombre d'élèves 23. Deux professeurs – professeur et stagiaire. Un professeur enseigne. Les professeurs stagiaires filment sur vidéo.

La classe

Modélisation dans le plan (E_2) – Le professeur motive les élèves.

Classification des quadrilatères.

Procédure de composition et de décomposition.

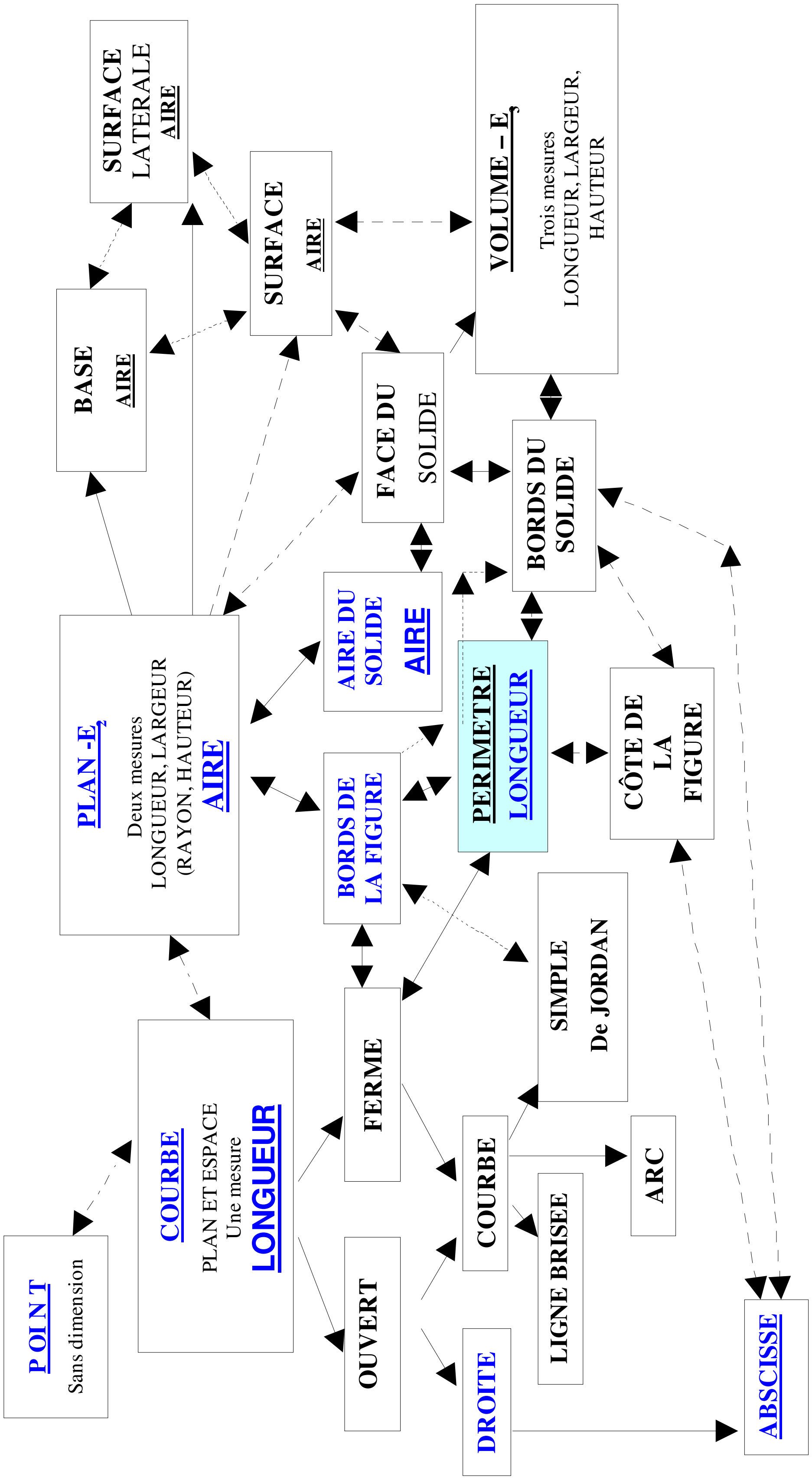
Périmètre et aire.

LECTURES RECOMMANDÉES

Brincková, J. (1996) *Didaktická hra v geometrii*. (Didactical games in geometry). Bratislava: DONY

Brincková, J. (2001) *Tvorivé dielne 2* (Zamerané na didaktické hry). Banská Bystrica: PFUMB

Millington, J. (1998) *Tangram. Puzzle picture to make you think!* Stockholm


SURFACE LATERALE AIRE
BASE AIRE
SURFACE AIRE
VOLUME – E
Trois mesures LONGUEUR, LARGEUR, HAUTEUR
FACE DU SOLIDE
BORDS DU SOLIDE
PLAN -E
Deux mesures LONGUEUR, LARGEUR (RAYON, HAUTEUR)
AIRE
AIRE DU SOLIDE AIRE
PERIMETRE LONGUEUR
CÔTE DE LA FIGURE
BORDS DE LA FIGURE
SIMPLE De JORDAN
FERME
COURBE
PLAN ET ESPACE
Une mesure
LONGUEUR
POINT
Sans dimension
OUVERT
COURBE
LIGNE BRISEE
ARC
DROITE
ABSCISSE

Le deuxième pilotage

par Brunetto Piochi*

Les stagiaires doivent organiser autant de dessins-plans différents ou de figures géométriques planes que possible, en utilisant un Tangram classique de 7 pièces (construit éventuellement par eux-mêmes). Ils devront ensuite considérer les propriétés géométriques (convexité, nombre de sommets….) de formes si différentes, afin de découvrir des relations générales ou d'en faire une classification. On leur demande en particulier de n'utiliser que des pièces spécifiées, en essayant de construire des polygones réguliers. Les propriétés de l'aire et du périmètre des figures (non isométriques) ainsi construites doivent également être considérées. Des activités semblables seront menées avec les élèves et les résultats de ce pilotage feront ensuite l'objet d'une discussion avec les stagiaires.

Thèmes mathématiques

La proposition est liée aux propriétés géométriques des dessins, en particulier aux mesures d'aire et de périmètre et aux isométries.

Objectifs

Pour les formateurs

Aider les stagiaires à passer de la théorie à la pratique.

Permettre aux stagiaires d'expérimenter une activité de manière autonome, avant de la proposer aux élèves.

Donner des instructions et un feedback

Pour les stagiaires

Discuter des notions de base en géométrie et de la manière de les présenter.

Réaliser la difficulté de définir et de nommer une "figure géométrique".

Expérimenter une activité de classification de figures non standards.

Pour les élèves du secondaire

Connaître les noms et les notions de base de quelques polygones connus.

Etre capable de mesurer la longueur d'un segment (directement ou, si nécessaire, au moyen du théorème de Pythagore).

Réaliser l'équivalence de figures planes pouvant être décomposées en parties semblables.

---

* Dipartimento di Matematica, Università di Firenze, Italie.

Travailler sur des figures planes au moyen d'isométries et de leurs compositions, en réalisant que les nouvelles figures sont isométriques aux précédentes.

Description de l'activité

Cette activité s'est déroulée en SSIS avec 42 étudiants, à la fois en première et en deuxième année, spécialisation en Sciences Naturelles, visant à obtenir le Diplôme d'Enseignement des Mathématiques et des Sciences pour les Collèges.

Phases et durée

Présentation du Tangram et des activités sur les figures géométriques (1h30)

Discussion et conception d'une proposition à mener en classe (45min.)

Pilotage en classe (entre 3 et 5 heures, selon les classes)

Discussion finale (30min.)

On donne aux étudiants (SSIS) des copies d'un Tangram en carton, à découper. Les trois activités suivantes sont proposées et feront ensuite l'objet de commentaires par l'ensemble du groupe:

Produire un quadrillage 8x8 sur lequel on reporte les coordonnées des sommets à joindre pour former les côtés des figures qui constituent le puzzle Tangram; (8,0) et (0,8); (0,0) et (4,4); (8,4) et (4,8); (2,6) et (4,8); (6,2) et (6,6); (4,4) et (6,6).

Former toutes les formes géométriques possibles en utilisant le carré et les deux petits triangles et en juxtaposant les côtés de mêmes longueurs. Les figures obtenues doivent être classées selon le nombre de sommets, l'aire et le périmètre.

Utiliser toutes les pièces du Tangram pour construire un polygone connu: triangle, carré, rectangle.

Durant la discussion qui s'en suit, les étudiants sont invités à répondre aux questions suivantes, portant essentiellement sur les aspects didactiques de l'activité:

Quelles sont les compétences auxquelles ce type d'activités fait appel? Quels sont les prérequis nécessaires? Quel type d'apprentissage est ici favorisé?

Quelles difficultés avez-vous rencontrées au cours de cette activité? Pensez-vous que les élèves en rencontreront d'autres? Comment peut-on les aider à les surmonter?

Comment esquisser une activité pour les élèves en se servant de cet outil? A quel niveau de classe est-elle destinée? A votre avis, quels sont les points les plus importants sur lesquels nous devons porter notre attention?

Plus tard, deux stagiaires qui enseignent déjà, mènent une expérimentation pédagogique en classe: ce choix est dû au fait qu'ils peuvent ainsi travailler avec des classes déjà connues et inclure l'activité dans le programme officiel de la classe. Les stagiaires utilisent la proposition, esquissée essentiellement au cours de la discussion préliminaire, en l'adaptant à leur propre contexte scolaire; l'expérimentation a lieu dans quatre classes (environ 80 élèves en totalité, âgés de 11 à 14 ans). Elle a aussi été utilisée pour une activité d'enseignement par d'autres professeurs dans des classes d'école primaire.

On a donné aux élèves un Tangram carré classique composé de 7 pièces (soit à découper soit à construire sur un quadrillage de coordonnées). Ils sont invités à construire différentes figures planes (fantaisistes ou géométriques) en utilisant ces pièces, et à formuler ensuite des hypothèses et vérifier des conjectures. Ils sont invités en particulier à construire des figures avec des pièces données (dans certains cas, toutes les pièces), en identifiant les figures isométriques, en faisant des conjectures sur les classifications possibles et en réfléchissant à la fois sur l'agrandissement et le périmètre des figures ainsi construites. Au terme de cette activité, les stagiaires expérimentateurs en font un compte rendu pour tous les autres, en faisant des commentaires sur les hypothèses qui ont émergé au cours de la discussion préliminaire. Finalement, l'ensemble du groupe propose des activités particulièrement pertinentes pour une analyse complémentaire.

PRESENTATION

L'apprentissage de la géométrie, surtout à l'école primaire et au collège, est particulièrement important, et va au-delà d'une simple série de notions apprises liées à un thème spécifique.

La géométrie joue un rôle crucial dans l'acquisition de méthodes de raisonnement en *organisant l'espace* et en procurant une *description rationnelle* de l'espace.

"Géométriser" l'expérience que nous avons du monde qui nous entoure est une activité mathématique primaire, qui précède même le calcul. Les enfants ont tendance à représenter essentiellement et spontanément leurs expériences à travers des activités de visualisation graphique, avant d'énumérer les objets qui les entourent. Cette activité de visualisation graphique, est en général une représentation et une interprétation de notre perception du monde réel; ce sont les mathématiques qui à un moment donné nous offrent des instruments spécifiques pour décrire ces objets réels: lignes, points, figures…

La géométrie provient donc de l'observation, la manipulation, la construction et la représentation d'objets simples, du pliage, du découpage, et de l'assemblage, de la vision de soi et de ce qui nous entoure dans un miroir… La "géométrisation" qui s'en suit n'est ni simple ni évidente, elle nécessite une capacité d'"interprétation" qui permet de se détacher d'une vue naïve pour parvenir à une compréhension complexe et rationnelle. La pensée géométrique se développe tout au long de la scolarité à travers les différents niveaux d'enseignement et d'apprentissage, fusionnant les aspects concrets et rationnels de la géométrie, bien que ces derniers soient chacun à leur tour prédominants à différents stades de l'expérience scolaire.

Afin d'illustrer ce point, considérons les "figures géométriques". L'approche initiale consiste à travailler avec des figures géométriques (élémentaires et régulières), décrire leur forme et leurs propriétés: On parle du niveau "visuel". Cette approche est normalement caractéristique des premières années du primaire (élèves âgés de 6 à 8 ans). Nous passons ensuite par la reconnaissance et la description des figures à partir de propriétés connues, à un niveau "descriptif analytique". Les élèves construisent ensuite des définitions, cherchent des propriétés caractéristiques et ont besoin d'argumenter et de prouver: c'est le niveau le plus élevé et le plus abstrait, aboutissant au niveau ''formel'', envisager la preuve des théorèmes et étudier un système axiomatique de la géométrie (ou plutôt des systèmes axiomatiques).

Etre capable de travailler avec des figures et de les dessiner devient un outil important pour l'apprentissage de la géométrie: en dessinant des figures nous pouvons visualiser des caractéristiques et des propriétés, parce que les propriétés d'un objet géométrique sont exprimées sous forme graphique au moyen de relations spatiales. Toutefois, l'inverse, partir du dessin vers l'objet géométrique est un acte d'interprétation humaine: la reconnaissance de propriétés visuelles spatiales liées aux propriétés géométriques n'est pas un acte spontané et nécessite donc un véritable processus d'apprentissage. Un dessin (géométrique) peut être interprété de nombreuses manières dans différents contextes et la perception entre en jeu lors de la construction d'une interprétation: elle peut être incorrecte, surtout quand les notions théoriques du lecteur sont limitées et ne lui permettent pas d'aller au-delà d'une lecture perceptive.

Le passage de l'objet au dessin géométrique en identifiant ses caractéristiques et du dessin à l'objet géométrique au moyen d'interprétations montre que l'activité graphique et son affinement progressif sont à la fois la conséquence et l'origine de l'apprentissage. Ils nous permettent par exemple de souligner les contradictions des idées fausses (il est extrêmement difficile de joindre parfaitement les "hauteurs" d'un triangle qui longe les contours d'un carré…) ou les avantages d'une théorie qui nous permet de "prédire" les conséquences générales (égalité du troisième côté de deux triangles dont deux côtés et l'angle entre les deux sont respectivement égaux…).

Les activités qui passent pour des expériences limites sont tout à fait pertinentes dans cette conception de l'apprentissage de la géométrie, présentant à la fois des aspects ludiques et graphiques tout en offrant des occasions de mathématisation abstraite. On omet trop souvent dans la pratique de l'enseignement ces périodes de transition et la plus délicate d'entre elles est précisément le commencement du secondaire lorsqu'on insiste sur les définitions et les formules détachées de tout contexte concret, contribuant ainsi à une vision déformée (souvent définitive) des mathématiques. L'aspect géométrique est vu et perçu comme un savoir mnémonique de définitions et de formules. Il semble donc nécessaire de prêter attention à la description et à l'évaluation d'une activité comme celle ci, dans la formation des enseignants. La proposition que nous avons pilotée et qui porte sur l'utilisation du Tangram, repose sur cette idée pédagogique.

ACTIVITES AVEC LES STAGIAIRES

On a donné à tous les étudiants en SSIS une copie d'un puzzle Tangram sur du papier facile à découper[2].

Durant la première partie de l'expérience, nous nous sommes détachés du schéma proposé par nos collègues slovaques: en raison des contraintes de temps, nous n'avons pas fait travailler les étudiants sur la construction de figures libres avec le Tangram. Quoiqu'il en soit, on a fait prendre conscience aux stagiaires que cette activité et toute autre activité de manipulation ou en situation simulée de laboratoire devrait comprendre une phase initiale d'exploration individuelle; d'où la nécessité de laisser aux élèves le temps de "jouer", d'explorer les différentes pièces disponibles pour essayer de les utiliser dans diverses productions créatives.

Nous avons ensuite commencé par présenter aux étudiants (SSIS), avec des transparents, un puzzle Tangram et un ensemble de figures que l'on pouvait réaliser en l'utilisant. On a fait remarquer qu'il était souhaitable d'inciter les élèves à travailler individuellement ou en petits groupes pour construire ces images ou en inventer de nouvelles. Cette phase pouvait à première vue sembler inutile d'un point de vue mathématique (c'est ce que de nombreux stagiaires pensaient bien qu'ils aient ensuite changé d'avis) mais elle est cruciale sur le plan de la motivation et pour permettre aux élèves de découvrir le matériel et d'en explorer intuitivement ses limites et son potentiel.

Pendant qu'ils regardaient les diapositives, on a demandé aux étudiants (SSIS) s'ils considéraient que cette activité serait facile pour leurs élèves et si, au cours de cette phase de l'activité, ils pouvaient penser à un aspect mathématique pédagogique (sans jamais oublier les aspects ludiques et motivants). La discussion qui a suivi a donné lieu à quelques rares interventions et toutes étaient du même avis: l'activité était facile, favorisait les liens interdisciplinaires (avec le dessin et la Technologie) mais pas très utile du point de vue mathématique. A notre avis, leur perplexité montre bien la vision déformée qu'ils ont de cette discipline, ce dont nous parlions précédemment: malgré leurs expériences antérieures en situation simulée de laboratoire, les stagiaires ont du mal à voir le potentiel des activités où une approche informelle est prédominante, pour l'apprentissage de la géométrie[3]

Il est intéressant de souligner que plus tard, lors de l'activité en classe, les professeurs stagiaires ont abordé cette phase avant même le véritable travail géométrique. Au cours de la discussion finale, ils ont fait remarquer que les élèves avaient trouvé l'activité relativement facile et avaient pu réaliser les figures proposées sans

[2] On a également donné aux stagiaires, entre autres, le schéma des exercices établi par les collègues de Banska Bystrica (SK), traduit bien sûr, de façon à ce que chaque stagiaire dispose de tout le matériel nécessaire à la discussion.

[3] Nous rappelons que les professeurs stagiaires participant à cette activité sont pour la plupart diplômés en Sciences mais pas en mathématiques. Leur expérience et leur conception des mathématiques ne sont souvent pas très différentes de celles de leurs élèves.

problème. Cependant, ils ont eux-mêmes souligné que cette activité a contribué à mettre en valeur une série de “propriétés” concernant les figures que les professeurs ont tendance à considérer comme allant de soi’, surtout les propriétés relatives à la nature dynamique de la position que les figures prennent dans le plan. (on sait que de nombreux élèves ont tendance à visualiser les figures géométriques de manière statique) ou aux différentes configurations des frontières entre les formes du Tangram, qui finissent par constituer les différentes parties de la figure composée: cette frontière peut être un point ou un segment, peut inclure une partie ou tout un côté d’une forme élémentaire etc. Le travail en classe pour la découverte d’une définition linguistique de ces situations a conduit à un enrichissement du vocabulaire géométrique et a servi de base à la phase suivante. A la lumière de cette remarque, il ne serait peut être pas inutile d’inclure aussi cette phase parmi les activités de formation (SSIS).

On a présenté aux étudiants (SSIS) les trois activités suivantes, sur lesquelles ils ont ensuite fait des commentaires tous ensembles:

Créer un quadrillage carré 8x8 sur lequel on reporte les coordonnées de sommets à joindre pour former les côtés des figures qui composent le puzzle Tangram: (8,0) et (0,8); (0,0) et (4,4); (8,4) et (4,8); (2,6) et (4,8); (6,2) et (6,6); (4,4) et (6,6).

Former toutes les formes géométriques possibles en utilisant le carré et les deux petits triangles et en juxtaposant les côtés de mêmes longueurs. Les figures obtenues doivent être classifiées selon le nombre de sommets, l’aire et le périmètre.

Utiliser toutes les pièces du Tangram pour construire un polygone connu: triangle, carré, rectangle.

Au cours de la discussion qui a suivi, on a invité les étudiants à répondre aux questions suivantes, portant essentiellement sur les aspects didactiques de l’activité:

Quelles sont les compétences auxquelles ce type d’activités fait appel? Quels sont les prérequis nécessaires? Quel type d’apprentissage est ici favorisé?

Quelles difficultés avez-vous rencontrées au cours de cette activité? Pensez vous que vos élèves en rencontreront d’autres? Comment peut-on les aider à les surmonter?

Comment esquisser une activité pour la classe en se servant de cet outil? Destinée à quel niveau pédagogique? A votre avis, quels sont les points les plus importants sur lesquels nous devons porter notre attention?

L’activité 1 nécessite évidemment des notions de repère cartésien dans le plan (ainsi que de la précision et une aptitude manuelle). Elle n’a pas posé de difficultés particulières aux stagiaires mais ils présumaient qu’elle en poserait à leurs élèves, qui ne possédaient pas tous les prérequis nécessaires pour le repérage. Au cas où les élèves posséderaient ces prérequis, les stagiaires proposaient de leur montrer la forme du tangram et de leur donner quelques coordonnées seulement. Au cours de la discussion, on a fait remarquer que, pour des raisons de symétrie et de grandeur

($8=2^3$) du quadrillage choisi, tous les sommets des parties du Tangram dans le quadrillage avaient de toute manière des coordonnées entières, bien que de nombreux segments aient une longueur irrationnelle. Il était intéressant, d'un point de vue didactique, d'observer que des compétences différentes sont nécessaires pour joindre les points avec des coordonnées données ou pour indiquer des coordonnées de points dans le plan: il est ainsi possible de poser différentes questions pouvant renforcer ou favoriser des compétences différentes selon les besoins de l'élève.

L'activité 2 a posé aux stagiaires deux types de difficultés différentes (qui les ont eux-mêmes étonnés…): le besoin d'identifier et de définir un mécanisme de classification qui identifie deux figures isométriques ainsi que l'impossibilité de "nommer" toutes les figures. Ce dernier point en particulier a mis en évidence le fait que trop souvent géométriser et "nommer" sont considérés comme des synonymes. L'activité a sans aucun doute été utile pour la formation initiale des professeurs, parce que, une fois en classe, ils ont pu gérer plus aisément la "découverte" par les élèves de polygones non standards. Les étudiants ont également montré la pertinence pédagogique de cette proposition pour favoriser le développement des compétences créatives chez les élèves qui sont invités à expérimenter la classification mathématique de manière autonome. Nous avons toutefois décidé de présenter l'activité comme une activité de groupe, car tous les élèves ne disposent peut-être pas des compétences requises suivant leur âge: une activité de groupe permettra des échanges avec tous les avantages qui en résultent.

Une remarque a été immédiatement faite par des stagiaires, peut-être pas (et en fait pas) par des élèves, à savoir qu'il n'est pas possible de classifier par aire des figures construites avec les mêmes pièces, étant donné que ces figures sont équivalentes, toutes équidécomposables.

Les difficultés rencontrées au cours de l'activité 3 se réduisent essentiellement à des difficultés (bien connues en gestalt-psychologie) de déstructuration et de restructuration de la vision de chacun, de manière à visualiser la figure donnée comme faisant partie d'une autre, dont la structure est de nouveau solide et rigide. Nous observons ici que lors des activités en classe les élèves étaient beaucoup plus aptes à effectuer ces activités, et beaucoup plus rapides, ceci étant peut-être dû à la structure moins rigide des figures géométriques sur lesquelles ils travaillaient. Ce qui avait été prédit par la plupart des étudiants (SSIS), lorsqu'ils présumaient que l'augmentation prévue de la capacité visuelle des élèves s'accompagnerait chez eux d'une aptitude plus grande.

EXPERIMENTATIONS EN CLASSE

Quatre étudiantes (SSIS) se sont portés volontaires pour présenter l'activité dans leur classe. Le plan de la proposition a été décidé lors d'une discussion collective et adapté aux différentes classes et aux contenus du programme officiel sur lesquels elles travaillaient. On a demandé aux stagiaires qui allaient participer à l'expérimentation de prêter attention aux points soulignés durant la discussion, et de tester les hypothèses faites concernant les difficultés et la pertinence de l'activité.

Un point commun à toutes les expérimentations: le nombre des élèves dans toutes les classes participantes était faible à cause de la grippe et des activités extra-scolaires d'hiver (et aussi dû au fait que les activités ont eu lieu en février).

Voici des extraits du compte rendu final des stagiaires.

6ème, 5 heures de travail, 12 élèves participant

Le Tangram a été fait à partir d'un quadrillage de coordonnées dont la construction a permis une révision des notions de repère cartésien dans le plan cartésien. Le professeur a ensuite laissé les élèves libres de jouer avec les pièces]. Immédiatement après avoir découpé les sept pièces, ils commencent à les regrouper, à les retourner, et à les assembler pour obtenir des images avec beaucoup plus d'enthousiasme que prévu. Le commentaire le plus étonnant qui ait été fait: "ça, ce sont de vrais maths!" signifiait, comme l'a plus tard expliqué l'élève lui-même, "on s'amuse bien tout en réfléchissant beaucoup et en se creusant la cervelle".

J'ai ensuite proposé des règles fixes, les mêmes pour tous: il ne faut pas superposer les pièces, il faut les juxtaposer et toujours les utiliser TOUTES. Après un petit moment d'hésitation au départ, on commence à manipuler les pièces sur chaque bureau. C'est le moment de gloire pour une petite chinoise qui n'est dans la classe que depuis deux semaines et ne connaît pas un mot d'italien et qui, après avoir copié et découpé silencieusement le modèle, s'est mise à réaliser en riant des figures de plus en plus compliquées: la première femme, le premier bateau… Je n'ai pas pu, et je ne le voulais pas, les interrompre jusqu'au moment où un garçon a construit "un trapèze, monsieur, un trapèze!" et j'en ai alors profité pour dire "oh, oui et il me semble qu'on peut aussi construire des carrés, des triangles, des rectangles…"C'était un nouveau défi: les sept pièces doivent toujours être toutes utilisées. Presque tous les élèves sont engagés dans la recherche et en moins d'une minute et demie apparaît le rectangle que nous, étudiants (SSIS), avons mis 5 à 6 minutes à trouver. Je vérifie discrètement et j'invite la fille qui l'a fait à le cacher, car je veux voir ce que font les autres élèves: eh bien, en moins de 5 minutes chaque élève sans exception a construit son propre rectangle.

C'est alors que je leur demande d'observer et de réfléchir à l'agrandissement de chaque figure, et considérant les figures qui ont la même aire, nous nous mettons à les imaginer comme étant construites avec les mêmes pièces, qui restent les mêmes, bien que déplacées, et cela donne lieu à des figures différentes qui ont cependant la même aire […]. Les élèves aiment beaucoup cette partie parce qu'ils peuvent tous manipuler et comparer les pièces à leur gré, se tromper et recommencer. Cela donne lieu à d'autres réflexions quand ils doivent observer les contours des figures, après les avoir posées sur le papier quadrillé pour mesurer leur périmètre: ‘comment se fait-il qu’on obtienne la même aire alors que les figures ont toutes des contours si différents’.

6ème, 4 heures de travail, 16 élèves participant

J’avais déjà en fait remarqué que les élèves ont des difficultés à imaginer des figures géométriques en dehors du contexte du manuel et du cahier d’exercices de la leçon de géométrie. Dans certains cas j’ai même eu à les aider à reconnaître des figures qu’ils avaient déjà dessinées en cours de technologie et qu’ils n’avaient qu’à reproduire en cours de géométrie.

La classe dans laquelle l’activité est mise en œuvre se compose essentiellement d’élèves provenant de la même école primaire et de la même classe et qui, je l’apprends au début de la leçon, ont déjà travaillé sur un Tangram. [Bien qu’ils en aient des souvenirs bien vagues] je me suis dit qu’il valait mieux ne pas faire travailler les élèves de la même manière qu’en primaire, et nous sommes donc allés en salle informatique sur un site web[4] qui présente un jeu permettant aux élèves de jouer avec les sept pièces du Tangram et de reconstituer soit des figures imaginaires soit des figures géométriques de même grandeur. Les pièces effectuent des rotations (45° à chaque fois), des translations, ou pour le parallélogramme uniquement, des retournements. Tous ont trouvé l’activité amusante et elle a provoqué d’intéressantes remarques, telles que par exemple:

“C’est bizarre de voir des figures géométriques se retourner”

“[le parallélogramme], retourné, je peux le placer, c’est comme s’il avait changé de forme”.

Il m’a semblé qu’ils étaient généralement tous activement engagés et on a progressivement fait remarquer que toutes les figures étaient obtenues à partir des mêmes pièces au moyen de translations, rotations, retournements, sans déformation. Une de mes élèves de 8ème année qui est autiste a aussi participé à l’activité et elle a étonnament pu jouer correctement et rapidement durant presque toute la durée du jeu.”

7ème année, 5 heures, 15 élèves participants

Tous les élèves comprennent les questions posées. Ceux qui ont d’habitude plus de difficultés à faire le travail en classe participent aussi de manière autonome et trouvent souvent des solutions correctes.

Durant la première leçon les élèves sont invités à utiliser les deux triangles isocèles égaux, plaçant côte à côte les côtés de même longueur pour obtenir le plus grand nombre de formes différentes possible […]. Je leur demande de réfléchir au moyen de vérifier si les figures ont le même périmètre ou non. La classe pense pouvoir utiliser

[4] www.math.it

une règle et mesurer les longueurs des côtés, mais quand ils découvrent que certaines longueurs sont exprimées par un nombre décimal, ils décident de prendre comme unité de mesure une valeur arbitraire, c'est à dire qu'ils prennent la plus petite longueur comme unité de mesure (nous en avons parlé ensemble) et en appliquant le théorème de Pythagore ils trouvent les autres longueurs.

Je leur demande alors si les figures ont la même aire. 10% seulement des élèves répondent correctement, j'ai donc besoin de leur faire réviser ce que nous avons fait précédemment, en leur proposant de mesurer le nombre de carrés (du papier). La semaine suivante nous utilisons un carré et un triangle, adoptant la même méthode que dans la leçon précédente. Cette fois 85% des élèves répondent correctement quand on leur demande si les figures obtenues ont la même aire et le même périmètre.

Deux jours après, je leur demande de former un rectangle, en utilisant toutes les pièces du Tangram. Après un moment initial critique, ils trouvent 2 ou 3 manières de le faire. Je leur demande si le rectangle et le carré qu'ils ont obtenus avec les pièces ont la même aire et le même périmètre. Cette fois, ils répondent tous correctement.

[En général] peu importe le nombre de réponses correctes ou incorrectes, je remarque qu'en raison de ce qu'ils ont découvert durant cette activité, les élèves sont amenés à réfléchir davantage avant d'exprimer leur point de vue. Nous avons obtenu de nombreuses solutions, mais elles n'étaient pas très différentes. Il est intéressant de constater que personne n'a pensé à copier sur son camarade, comme si le sujet à l'étude était une affaire personnelle. Ils ont sans aucun doute collaboré, mais de manière fonctionnelle, selon leurs besoins pour trouver la solution. Une très bonne élève en particulier ne pouvait pas résoudre le problème [trouver l'aire d'une des figures obtenues] parce qu'elle ne savait pas utiliser les pièces. Quelques jours plus tard, elle m'avoue que lorsqu'elle résout un problème géométrique elle ne dessine la figure que pour me faire plaisir. Une autre fille, peu douée, a, quant à elle, résolu rapidement le problème en retournant un triangle (qu'elle a nommé figure 1) sur un parallélogramme (figure 2) et en écrivant $A_2 = 2A_1$."

7ème année, 4 heures pour la phase initiale + 4 autres pour enseigner, 14 élèves participants

[La phase initiale ressemblait beaucoup à celle menée dans les classes de 6ème, dû aussi à une certaine faiblesse générale de la classe, engagée dans une activité de tutorat avec des élèves du primaire (âgés de 8 ans). La professeure pensait qu'elle pouvait utiliser ce groupe pour stimuler les élèves à retravailler leurs notions sur un plan métacognitif, afin qu'ils les expliquent ensuite aux plus jeunes élèves]. L'activité pédagogique a été proposée dans deux classes de 3ème année et s'est déroulée en deux phases distinctes.

Au cours de la première phase, les élèves, aidés par d'autres plus âgés, dessinent le carré 8 x 8 du Tangram sur du papier quadrillé avec des carrés de 1 cm de côté.

Ensuite, ils découpent Tangram et les plus jeunes élèves inventent et construisent différentes figures avec les 7 pièces, en donnant un ‘’titre’’ à chaque création. Finalement, les élèves dessinent ces figures dans leur cahier d’exercices.

La deuxième phase a prévu un “prolongement” du travail, conçu en collaboration avec le professeur de technologie: des “Tangrams géants” mesurant 60x60 cm ont été construits sur des feuilles de papier quadrillé avec des carrés de 2.5 x 2.5 cm. Les Tangrams ont ensuite été collés sur des cartes, puis découpés; chaque élève est invité(e) à reconstituer la figure déjà construite et à la colorier comme il/elle le veut. Les diverses pièces de chaque figure sont collées avec du scotch, rendues rigides avec des tiges de bambou et ensuite utilisées comme masques.

Ce travail est suivi d’une discussion collective durant laquelle les plus jeunes élèves expriment leur étonnement en découvrant qu’à partir de Tangrams au début identiques ils pouvaient fabriquer des figures si différentes. Les élèves plus âgés ont essayé d’aider les plus jeunes à comprendre pourquoi “certaines formes avaient l’air plus longues, bien qu’elles n’aient pas pu grandir”, de leur expliquer ce qui a changé par rapport au début quand il n’y avait pas de différences entre les Tangrams. Nous rapportons ci-dessous quelques unes des phrases qui ont vraiment convaincu les jeunes élèves et qui semblent montrer une compréhension du travail accompli et une capacité de mise en forme verbale qui n’est pas sans intérêt:

“Les formes sont aussi grandes qu’avant mais la position des pièces a changé’.

“Les parties sans carton ont changé, c’est à dire les espaces vides” (derrière cette phrase se cache bien sûr le concept de conservation de la grandeur, qui était évident pour l’élève qui l’a prononcée…).

DISCUSSION COLLECTIVE FEEDBACK

Après le compte rendu des stagiaires qui ont expérimenté l’activité en classe, la discussion a porté sur la motivation de l’activité (et tous étaient d’accord sur ce point), en particulier sur son potentiel pour faire participer aussi les élèves qui manifestent peu d’intérêt ou qui ont peu d’aptitude pour les mathématiques.

Les réactions des élèves de différents niveaux scolaires étaient beaucoup plus intéressantes: lors de la discussion préliminaire quelques stagiaires avaient prédit que les élèves plus âgés seraient moins intéressés. Leur prédiction ne s’est pas confirmée, bien qu’on ait remarqué que les élèves plus jeunes étaient en fait plus engagés dans la construction de figures imaginaires, alors que les plus âgés voulaient rapidement se mettre à travailler sur les figures géométriques.

Au cours de cette phase, nous avons aussi remarqué que ce travail stimule naturellement l’acquisition de techniques, de méthodes et de la terminologie liées aux transformations géométriques. On a donc été amené dans cette proposition à considérer l’activité, après la $6^{ème}$, comme la préparation à un module de géométrie en situation simulée de laboratoire. Ce module sera introduit après avoir complété l'unité didactique sur le polygone, visant à une réflexion sur la conservation des grandeurs et les isométries (en particulier: symétrie, translation et rotation), ainsi qu'au développement de compétences liées à la visualisation et à la reconnaissance de figures géométriques en général.

PROPOSITIONS POUR UN PROLONGEMENT

Au terme de la discussion finale deux autres activités ont été proposées, l'une conçue et déjà partiellement menée par une des stagiaires et l'autre présentée par les professeurs (SSIS):

Recherche du Tangram sur le Web. Si vous tapez le mot Tangram sur n'importe quel moteur de recherche Internet, vous obtenez la liste de nombreuses pages Web, et beaucoup d'entre elles proposent des activités pédagogiques. Une activité convenant aux stagiaires pourrait consister à identifier les activités d'apprentissage les plus pertinentes au niveau scolaire de leurs élèves, et on pourrait proposer aux élèves de se connecter à des sites contenant un type particulier d'informations ou de questions produisant d'autres recherches ou des lectures.

Puzzles en trois dimensions. Certains élèves, et certains adultes aussi, ont de fortes capacités de vision spatiale et de représentation graphique, d'autres éprouvent des difficultés dans ce domaine. On sait bien que ces capacités ne sont pas nécessairement du même niveau que d'autres aptitudes mathématiques. Il y a des étudiants qui ont de grandes compétences sur le plan verbal et il est plus facile pour eux de se rappeler des mots comme "un solide à huit sommets" que de visualiser l'image; vice versa, on peut très bien visualiser un cube mais avoir besoin à chaque fois de compter les sommets et les côtés. C'est en raison de ces différents styles cognitifs qu'il faut proposer à tous les étudiants des activités nécessitant une vision spatiale et une description verbale des solides, de façon à ce qu'ils puissent compléter leurs compétences et que les moins performants en statistique et algèbre, mais réussissant bien dans cet autre domaine puissent avoir de bons résultats.

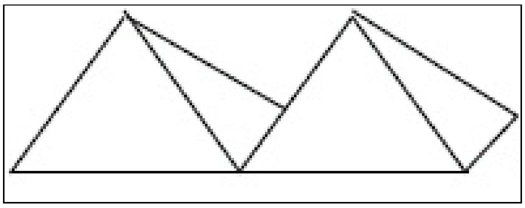
Pour illustrer le mécanisme, nous avons posé aux étudiants (SSIS) les questions suivantes:

> A. – *"Imaginez un tétraèdre et écrivez combien il a de faces, de côtés et de sommets.*
>
> *Imaginez que vous l'ouvriez pour obtenir son dépliage dans le plan. Quelle est sa forme? En a t-il qu'une?*
>
> *Un garçon a construit une figure en utilisant des carrés et des triangles équilatéraux, on ne sait pas combien. On sait que cette figure a 5 faces, 5 sommets et 8 côtés. Quelle est cette figure?"*

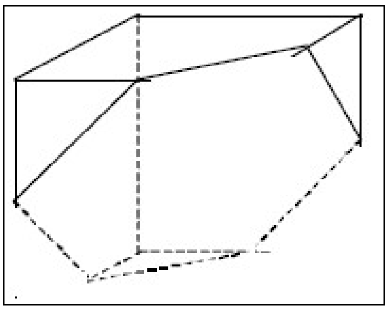
La question n'était pas accompagnée de dessins, tout reposait sur la visualisation spatiale des étudiants (SSIS) activement impliqués.

Les étudiants (SSIS) ont éprouvé le besoin de clarifier le fait qu'un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire et à quatre faces ("comme le ion de silice du quartz" a suggéré une des stagiaires, s'inspirant de son diplôme en chimie) pour pouvoir résoudre la première partie de la question assez facilement. Ils peuvent ainsi s'appuyer sur ce résultat pour résoudre d'autres parties du problème et s'aider de leurs mains pour "construire" l'objet dans l'espace.

> B. – *"Imaginez deux pyramides différentes à base carrée, dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux. Placez les deux pyramides sur le plan, côte à côte de sorte qu'elles n'ont en commun qu'un (et uniquement un) côté de la base. Il y a un espace vide entre les deux solides. Pourriez-vous décrire le solide pouvant remplir ce vide, de manière à obtenir un solide convexe?"*



> C. – *"Prenez 3 carrés 10x10, sur un des côtés de chaque carré découpez un triangle droit de côté 5. Considérez aussi un hexagone régulier de côté $5\sqrt{2}$. Arrangez maintenant ces 7 pièces pour construire un solide comme celui de la figure. En juxtaposant deux de ces solides, quel solide régulier obtenons-nous?"*



Les réponses aux questions B. et C. (respectivement, un tétraèdre et un cube) ne sont pas intuitives et ce type d'exercices illustre pour les stagiaires les difficultés de visualisation spatiale dont nous parlions précédemment; en même temps, parmi les stagiaires ainsi que dans les classes où l'activité a été mise en oeuvre, certains ont pu "voir" la solution bien avant les autres (étonnamment quelquefois) et ils deviennent alors immédiatement les professeurs ou les meneurs de la classe.

> D. – *"Prenez des cubes simples (comme des blocs en bois) et essayez de construire un solide avec un nombre déterminé de ces cubes. Représentez*

ensuite ce solide sous différentes perspectives possibles (frontale, de côté droit, de côté gauche, de dessus) à l'aide d'une grille avec des pointillés donnée.

Vice versa étant donné ses représentations, reconstruisez le solide."

Evidemment, la plus grande difficulté dans ce type d'activité réside dans le fait qu'on a des représentations sur des plans différents, certains dissimulés, et nécessitant donc un grand effort de représentation spatiale. Toutefois cette activité permet aussi de créer des liens avec d'autres disciplines comme la technologie et le dessin, outre le fait qu'elle offre un bon support pour une description rationnelle de ce qui a été à chaque fois réellement accompli.

LECTURES RECOMMANDÉES

Gardner, M.(1956). *Mathematics, Magic and Mistery*. Dover Pub.

Kanizsa, G. (1973). *Il 'problem-solving' nella psicologia della gestalt*, in Mosconi, G. e D'Urso, V., *La soluzione dei problemi*. Firenze: Giunti-Barbera.

Jaglom, I.M. (1972). *Le isometrie*. Bologna: Zanichelli.

Pellegrino, C. (1999). *Prospettiva: Il punto di vista della Geometria*. Bologna: Pitagora Ed.

UMI-CIIM (2001). *Matematica 2001, Materiali per il XXVII Convegno Nazionale sull'Insegnamento della matematica*. Lucca: Liceo Scientifico "A. Vallisneri".

Le troisième pilotage (à l'Université de Bohême du Sud, České Budějovice, CZ) et Conclusion

par Jaroslava Brincková et Iveta Dzúriková

L'objectif général de la proposition Tangram pilotée en Slovaquie est de faire réfléchir les professeurs stagiaires à l'intérêt des activités-problèmes mettant en oeuvre l'activité de mesurer pour la formation mathématique des élèves. Nous avons utilisé le jeu du Tangram dans les séminaires pour préparer les professeurs stagiaires à enseigner la géométrie statique et métrique à des élèves de 11 à 14 ans, c'est à dire, au collège. Le but principal est le développement de la pensée créatrice et de l'imagination géométrique des élèves en utilisant le Tangram à l'école. Notre intention était de préparer une activité scolaire nous permettant d'aborder les concepts de périmètre et d'aire dans différents contextes. Nous souhaitons aussi utiliser le Tangram pour mettre également en évidence des isométries en mesurant le périmètre et l'aire.

Nous avons porté une attention particulière sur les objectifs partiels suivant:

Clarification didactique de la séquence des étapes dans l'élaboration des termes géométriques de périmètre et aire des formes planes: *perception – modélisation – dessiner dans le plan -mesure - en déduire des relations fonctionnelles.*

Description des niveaux de la pensée géométrique de van Hiele, en portant une attention particulière sur la déduction de relations fonctionnelles et en utilisant des termes géométriques.

Modélisation du monde des nombres et des formes en utilisant le terme *mesure de l'abscisse*.

Trouver des relations entre le périmètre et l'aire de diverses formes.

Les partenaires à Florence (Italie), qui ont co-piloté le projet Tangram, nous ont donné le feedback suivant (leur point de vue sur le projet):

La proposition est liée aux propriétés géométriques des dessins, en particulier aux mesures de l'aire et du périmètre et aux isométries. Elle a été envisagée comme une activité en laboratoire, de sorte que les élèves doivent utiliser leurs compétences perceptives, manuelles et logiques, à partir d'objets concrets pour parvenir à des compétences géométriques et graphiques. On attend des élèves au terme de l'activité qu'ils soient capables de:

connaître les noms et les propriétés élémentaires de quelques polygones connus

mesurer la longueur d'un segment (directement ou, si nécessaire, au moyen du théorème de Pythagore)

réaliser l'équivalence des figures planes qui peuvent être décomposées en parties identiques

travailler sur des figures planes au moyen d'isométries et de leurs composées, en réalisant que les nouvelles figures sont isométriques aux précédentes.

Nos partenaires en République Tchèque ont coopéré avec un autre institut de formation des enseignants (l'Université de Bohême du Sud à České Budějovice, professeur-formateur Helena Binterová) afin de co-piloter le projet du Tangram. Ils nous ont offert cette variante des objectifs du projet:

Familiariser les futurs maîtres d'école élémentaire aux moyens didactiques du "Tangram" afin qu'ils puissent l'utiliser plus tard quand ils seront professeurs, dans des leçons de géométrie métrique plane. L'objectif principal est de définir les concepts, de développer la pensée créatrice et l'imagination géométrique et de faire prendre conscience aux étudiants professeurs des difficultés didactiques qui y sont liées.

Une des tâches obligatoires pour les professeurs stagiaires est de démontrer le théorème de Pythagore ainsi que d'ébaucher une procédure et de justifier son choix.

Les objectifs des trois participants au projet Tangram sont essentiellement identiques. Les élèves sont capables de développer leur imagination géométrique par le biais d'un jeu didactique et de renforcer leurs connaissances de la géométrie métrique et des isométries.

Les professeurs stagiaires préparent des leçons pour des classes distinctes. Ils étudient les problèmes d'application en géométrie métrique par le biais de l'analyse "a priori". Ils peuvent voir le thème de la modélisation géométrique sous une perspective nouvelle par le biais d'une analyse "a posteriori".