

TANGRAM V MATEMATIKE PRE DRUHÝ STUPEŇ ZŠ

Jaroslava Brincková, Miroslav Haviar* a Iveta Dzúriková**

ÚVOD

Učenie je výsledkom činnosti a prostredníctvom činnosti sa vyvíja. Medzi aktivity, ktoré deti vo vyučovaní matematiky najčastejšie preferujú, patria matematické hry. Ak takéto hry sa používajú v súlade s konkrétnymi didaktickými cieľmi, nazývame ich *didaktické hry* vo vyučovacom procese. K didaktickým hrám radíme aj rôzne geometrické skladačky, medzi ktoré patrí aj starý čínsky hlavolam nazývaný Tangram. Z hľadiska vyučovacích cieľov, Tangram pomáha vo vyučovaní geometrie rozvíjať :

1. geometrické vedomosti,
2. logické schopnosti,
3. geometrickú predstavivosť.

Geometrická predstavivosť je schopnosť vnímať:

- geometrický útvar, jeho veľkosť a polohu v priestore,
- daný útvar v inej ako v pôvodne vnímanej polohe,
- zmenu útvaru, jeho rozmerov, štruktúry a pod,
- znázorniť telesá v rovine alebo podľa slovného popisu,
- z obrazu v rovine modelovať priestorový útvar.



Starý čínsky hlavolam Tangram

* Pedagogická fakulta, Univerzita Mateja Bela, Banská Bystrica, Slovenská Republika.

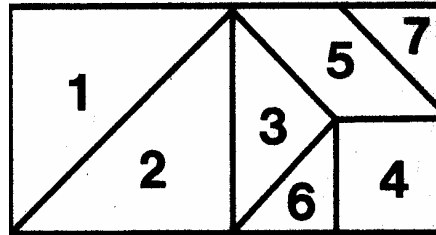
** 8. ročné evanjelické gymnázium, Banská Bystrica, Slovenská Republika.

Hlavná pilotáž

Jaroslava Brincková a Iveta Dzúriková

NÁVRH

Jednou z aktivít posilujúcich geometrickú predstavivosť pri vyučovaní geometrie je modelovanie pomocou papierového Tangramu v rovine alebo pomocou skladačky Tangram v priestore.



Obrázok 1. Tangram

Pravidlá hry s Tangramom

- V každom obrazení sa musí použiť všetkých sedem dielov.
- Žiadne časti dielov sa nesmú prekryvať.
- Všetky diely sa môžu ľubovoľne prevracať.

Vo vyučovaní geometrie sa dá so skladačkou Tangram pracovať v podstate dvomi spôsobmi:

- *Skladať dieliky podľa predlohy* – takto sa dobre precvičuje konštruktívna predstavivosť, zmysel pre geometrické obrazce a ich zákonitosti; dieťa sa učí vidieť plochu.
- *Vyplniť dielikmi ohraničenú plochu* – tu sa stretávame s tromi možnosťami:
 - Útvar je daný svojou hranicou.
 - Všetky body patriace útvaru sú v jednej farbe – plný tvar.
 - Útvar je položený do štvorcovej siete.

Ak modelujeme podľa predlohy, žiak musí porovnať hranice jednotlivých útvarov, na základe porovnania vybrať odpovedajúci diel a priradiť ho vo vhodnej orientácii do vytváraného obrázku. Vybavuje si tak v mysli geometrický tvar, jeho veľkosť a polohu v priestore aj útvar v inej než v pôvodne vnímanej polohe.

Ak vyplňujeme dielikmi ohraničenú plochu, máme rôzne stupne obtiažnosti pri riešení tej istej úlohy. Ako vyplýva z výskumov, žiaci v mladšom školskom veku nevnímajú štvorcovú sieť ako pomôcku, ktorá im uľahčuje prácu s pravouholníkmi, ale vidia ju ako prostredie vo dvoch farbách, či ako obrázkový papier. Citlivosti na systém rovnobežiek a kolmíc sa musia postupne naučiť. Najúspešnejšie pracujú, ak je útvar daný svojou hranicou.



Vo vyučovaní geometrie na 2. stupni ZŠ sa Tangram používa pri riešení motivačných úloh, pri určovaní obsahov, obvodov, v učive o osovej súmernosti, podobnosti útvarov, pri dôkaze Pytagorovej vety a modelovaní racionálnych čísel. Tým tiež prispieva k rozvoju izometrických transformácií v geometrii. Nie je však úplne ideálnou skladačkou pre vyučovanie geometrických pojmov, lebo sa skladá len z jedného zo siedmich druhov trojuholníkov (rovnoramenný pravouhlý), dvoch štvoruholníkov (štvorec a kosodĺžnik) a neobsahuje kruh.

Náš cieľ

Poukázať na rozdiely v efektívnosti práce žiakov pri práci s jednofarebnou a viacfarebnou skladačkou. Rozvíjať schopnosť žiakov vidieť hranicu a plochu nekonvexného rovinného útvaru.

Poukázať na vplyv grafického prostredia (štvorcová sieť, farebný papier, rovina – biely papier) na zručnosť znázorniť model v rovine. Určiť jeho obvod a obsah pomocou rôznych častí skladačky.

1. Téma: Tangram pre meranie obvodu a obsahu

2. Vzdelávací cieľ:

Meranie rovinných útvarov použitím neštandardnej jednotky miery

3. Popis činnosti:

Hlavným cieľom projektu Tangram, bolo sústrediť pozornosť budúcich učiteľov na dôležitosť problému činnosti merania, ktoré môžu viesť k matematickej tvorivosti žiakov. Na seminároch pre študentov – budúcich učiteľov sme použili skladačku Tangram pri príprave na vyučovanie statickej a metrickej geometrie pre 11-14 ročných žiakov nižšieho stupňa 8. ročného gymnázia s cieľom, rozvíjať kreativitu myslenia a geometrickú predstavivosť žiakov pri použití Tangramu v škole. Zamerali sme sa na prípravu školskej aktivity, v ktorej sme rozdelili koncepty obvodu a obsahu rôznych tvarov. Súčasne sme využili Tangram na demonštráciu izometrických transformácií pri meraní obvodu a obsahu.

Zamerali sme sa na tieto čiastkové ciele:

- Didaktická klasifikácia postupných krokov pri modelovaní geometrických pojmov obvod a obsah rovinných útvarov: *percepcia - modelovanie – kreslenie v rovine - meranie - vyvodenie funkčných vzťahov.*
- Popis úrovni geometrického myslenia podľa van Hieleho¹, čiastočne zamerané na dedukciu funkčných vzťahov pri použití geometrických pojmov.
- Modelovanie sveta čísel a tvarov za pomoci rôznych *jednotkových úsečiek.*
- Objav vzťahov medzi obvodom útvaru, obsahom útvaru a jeho rôznymi tvarmi.

¹ Van Hiele, P.: *Structure & Insight*. Dodrecht: Kulver Published, 1983

- Pre 14 ročných žiakov: Overenie veľkosti obvodu a obsahu vymodelovaných rovinných útvarov výpočtom a využitím netradičnej jednotky miery alebo použitím Pytagorovej vety pri výpočtoch.

4. Ciele

Pre žiakov

- Prepojenie aritmetiky, algebry a geometrie v použitých aktivitách.
- Použitie Tangramu pre modelovanie a meranie obvodu a obsahu rovinných útvarov.
- Učíme sa odhadnúť veľkosť, rozhodnúť o pravdivosti tvrdenia, meniť a overiť tvrdenie.

Pre budúcich učiteľov

- *V matematike:* Preštudovať rôzne prístupy k výkladu miery v geometrii. (Modelovanie vzťahov medzi svetom čísel a tvarov).
- *V didaktike matematiky:* Práca v skupinách – tvorba didaktických materiálov zvyšujúcich motiváciu žiakov k učeniu. Testovanie účinnosti vytvorených materiálov v nasledujúcich 4 krokoch:
 - vnímanie, modelovanie a kreslenie;
 - zavedenie jednotky miery a meranie;
 - postup skladania;
 - postup rozkladu.

Pre cvičných učiteľov

- Spolupracovať s budúcimi učiteľmi na tvorbe príprav na vyučovanie a učebných materiálov, primeraných veku žiakov, ich úrovni, individuálnym potrebám, umožňujúcim diferencovane riešiť úlohy, atď.
- Pripraviť pokyny a spätnú väzbu.

5. Úlohy

Pre budúcich učiteľov

Vnímanie, modelovanie a kreslenie

Úloha č. 1 - Oboznámte sa s pravidlami hry s čínskym Tangramom a pripravte si túto skladačku vo dvoch verziách: jednofarebnú a rôznofarebnú. To znamená, že jednofarebná hra má všetky diely 1 – 7, napr. biele a pestrofarebná má susedné tvary rôznej farby. Potom si vystrihnite obe verzie Tangramu.

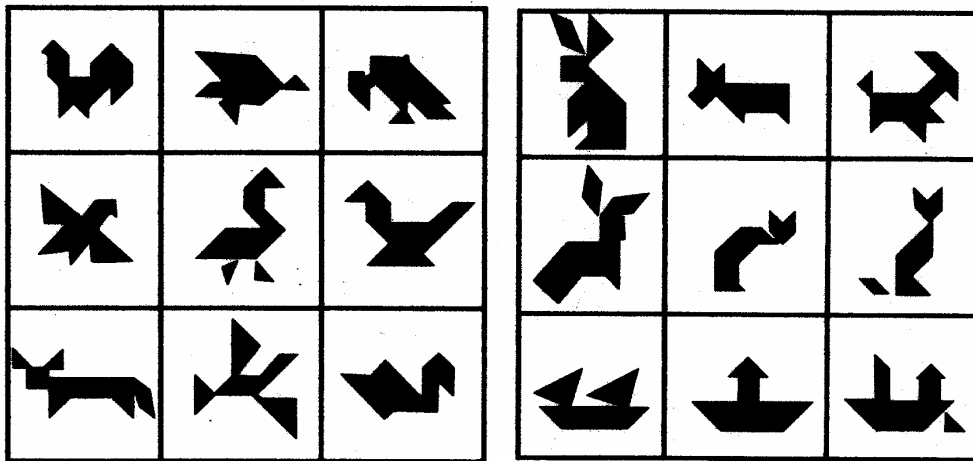
Použite jednotlivé časti Tangramu každej verzie samostatne na modelovanie rôznych útvarov podľa predlohy na obrázku 2, ale aj iných, napríklad dievča, sviečku a pod.

Vnútorne členenie zložených modelov v úlohách v jednofarebnom prevedení aj vo farebnej zostave nakreslite postupne na štvorčekový papier, čistý papier, farebný papier.

Diskutujte o vplyve prostredia na schopnosť vnímať hranicu rovinného útvaru znázorneného vo dvoch rôznych prevedeniach Tangramu a zručnosti znázorniť jednoznačne útvary na obrázku, vymodelované pomocou Tangramu.

Diskutujte o vplyve farby v jednotlivých častiach skladačky na schopnosť vnímať vymodelovaný útvar ako celok. Nakreslite rôzne vytvorené Tangramové obrázky (jednofarebný a pestrofarebný) a vyznačiť hranicu celého nakresleného obrázku.

Na záver diskutujte o možnosti použiť hru Tangram vo vyučovaní klasifikácie štvoruholníkov u 11 – 14 ročných žiakov.



Obrázok 2: Modely zo skladačky Tangram

Zavedenie jednotky miery a meranie

Úloha č. 2 - (Pozri Mapu pojmov – Miera v prílohe alebo slovenskú stránku [http://www.zoznam.sk/katalogy/Vzdelavanie/Slovniky/.](http://www.zoznam.sk/katalogy/Vzdelavanie/Slovniky/)) Odlíšte význam pojmov obvod a obsah v matematike a v kontexte ostatných školských učebných predmetov. (geografie, jazyka slovenského, prírodovedy, občianskej náuky, výtvarnej výchovy, geometrie,...). Touto činnosťou chceme zdôrazniť, že obvod chápeme v matematike ako dĺžku uzavretej krivej čiary, danú usporiadanou dvojicou [číslo; jednotka miery] a nie ako hranicu rovinného útvaru.

Procedúra skladania [Obrázok 1]

Použijeme dve jednotky miery – prvá jednotka miery je strana štvorca 4 (označená ako s), druhá jednotka miery je prepona trojuholníka 7 (označená ako h). Ukážme, že k danému *obvodu* (*obsahu*) môžeme zostaviť podľa pokynov rovinné útvary rôzneho obsahu (obvodu).

Úloha č. 3 - Pomocou dvoch zhodných trojuholníkov (napr. 1 a 2, alebo 6 a 7), modelujte rovinné útvary tak, že prikladáte celé zhodné strany k sebe. Vymodelované

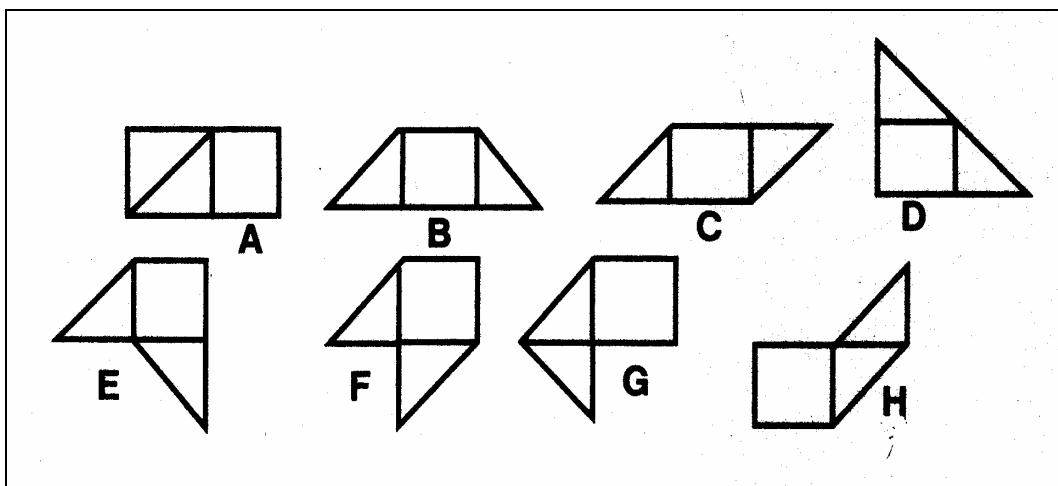
útvary si nakreslite do zošita. Vyjadrite obvod vymodelovaných útvarov použitím jednotiek dĺžky s a h .

Úloha č. 4 - Pomocou štvorca 4 a dvoch trojuholníkov 6 a 7 z Tangramu, zostavte rovinné útvary tak, že prikladáte celé zhodné strany k sebe. Nájdite všetky riešenia a klasifikujte ich podľa obvodu, podľa počtu strán a veľkosti uhlov aj podľa počtu rovnobežiek.

Pri spoločnej analýze vymodelovaných útvarov, môžu žiaci objaviť, že strany vymodelovaného trojuholníka sú dlhšie ako strany štvorca. Tieto objavy podnecujú zaujímavú a didakticky plodnú diskusiu – aký záver môžeme z diskusie vyvodit'?

Myslíme si, že takto nie je možné merať- ako klasifikujete útvary? Ktoré útvary majú rovnaký obvod? Použili sme dve jednotky miery- s a h . Takže obvody sú : A je $6s$, B je $4s + 2h$, C je $4s + 2h$,... atď. (V skutočnosti môžeme vidieť, že všetky sú $4s + 2h$, okrem útvaru A) Táto motivácia použitia symbolu (s , h) na riešenie úlohy tiež vedie k ďalším otázkam.

Napr. Aké sú obvody všetkých častí Tangramu?



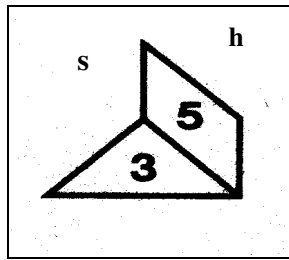
Obrázok 3: Riešenie

Procedúra rozkladu [Obrázok 1]

Úloha č. 5- Zo všetkých dielov Tangramu zložte: a) trojuholník b) štvorec c) obdĺžnik. Skúmajte rozdiely pri práci s jednofarebnou a farebnou skladačkou.

Úloha č.6 - Postupne skladajte trojuholník z dvoch, troch, štyroch, piatich, šiestich a všetkých dielov farebného Tangramu. Nakreslite si vnútorné členenie. Nájdite všetky riešenia zostavené z piatich dielov Tangramu.

Úloha č.7 - Barborka zostavila päťuholník (pozri obrázok 4) z dielov č. 3 a 5. Z ktorých iných dielov Tangramu viete zostaviť taký istý päťuholník? Použite diely č. 4, 6, 7. Nájdite všetky riešenia.



Obrázok 4: Päťuholník

Obvod a obsah rovinných útvarov [Obrázok 1]

Úloha č.8 - Z dvoch trojuholníkov 6 a 7 zostavte všetky možné tvary tak, že prikladáte celé zhodné strany k sebe. Ak je jednotkou dĺžky pre meranie dielov Tangramu strana štvorca, označená ako s a prepona malého trojuholníka, označená ako h , skúmajte vzťahy medzi obvodom a obsahom vymodelovaných útvarov.

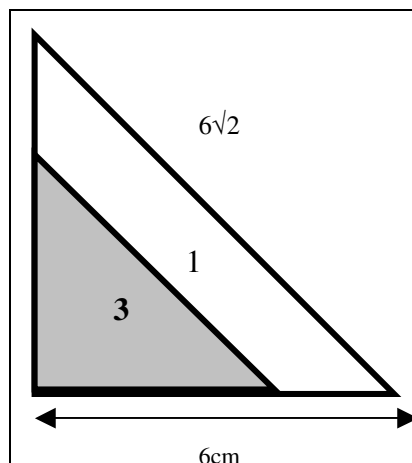
Nemusíme poznať výšky trojuholníkov ani potrebné obsahy na usporiadanie a klasifikáciu útvarov. Môžeme použiť ako jednotku obsahu T (obsah trojuholníka 6 alebo 7). Všetky útvary tak majú obsah - $2T$.

Úloha č. 9 - Vymodelujte útvary na obrázku č. 3 pomocou dvoch trojuholníkov 6 a 7 a štvorca 4 z Tangramu. Porovnajme ich obvod a obsah.

Úloha č. 10 - Ak označíme ako T jednotku obsahu - malý trojuholník z Tangramu, zistite obsah ostatných častí Tangramu.

Voliteľna úloha [Obrázok 1]

Janko vložil stredný trojuholník 3 z Tangramu do veľkého trojuholníka 1 tak ako ukazuje obrázok 20. Vypočítajte obsah vzniknutého lichobežníka (vyfarbeného na modro) použitím jednotiek dĺžky s a h . (Aký je obsah trojuholníka 3?) Vyjadrite obsah v cm^2 , ak dĺžka odvesny veľkého trojuholníka 1 je 6cm a dĺžka jeho prepony je $6\sqrt{2}\text{cm}$.



Obrázok 5. Trojuholník

Pre žiakov

Žiaci si nakreslia na papier Tangram podľa obrázku 1. Pripravlia ho vo dvoch verziách, jednofarebný a farebný, to znamená že jednofarebný má všetky geometrické útvary 1 – 7 biele a farebná verzia má všetky časti rôznej farby. Potom vystrihnú každý diel Tangramu oboch verzií. Žiaci použijú časti každého Tangramu (biely aj farebný) samostatne na modelovanie rôznych modelov na obrázku 2 a oboznámia sa s pravidlami hry Tangram.

Potom nakreslia svoje vymodelované útvary v každej verzii (biela aj farebná) na tri druhy papiera: biely, štvorčekovaný a farebný. Následne diskutujú o vplyve rôzneho prostredia na schopnosť nakresliť obrázkov vymodelovaný pomocou rôznych Tangramov.

Žiaci diskutujú o vplyve rôzneho prostredia na schopnosť vidieť hranicu útvaru vymodelovaného pomocou rôznych Tangramov.

V nasledujúcom kroku vymodelujú pomocou všetkých dielov Tangramu mačku, psa a zajaca a diskutujú o možnosti použiť Tangram na klasifikáciu štvoruholníkov

Naučia sa matematické pojmy v angličtine: základňa, výška, prepona, pravý uhol, kolmica a (v Tangrame) kosodĺžnik a pojmy týkajúce sa relácií symetrie, podobnosti, rotácie a translácie.

Potom si objasnia význam pojmov obvod a obsah v rôznych kontextoch.

Použijú dve jednotky miery – prvá jednotka miery je strana štvorca 4 (označená s) a druhou je prepona trojuholníka 7 (označená h). Zistia, že danému *obvodu (obsahu)* môžeme zostaviť podľa pokynov modely rôznych *obsahov (obvodov)*.

Žiaci zostavia opäť modely z úlohy 3 a 4. Zoskupia všetky útvary, ktoré majú rovnobežné a zhodné strany. V skupinách diskutujú o počte riešení tejto úlohy.

Ak označia ako T jednotku obsahu malého trojuholníka Tangramu, môžu pomocou nej vyjadriť obsah ostatných častí skladačky.

Hľadáme spoločné znaky, rozhodujeme sa, meníme a overujeme výsledky.

Prídavkom je individuálna práca najlepších žiakov v úlohách č. 6, 7 a voliteľnej úlohe.

Pre cvičných učiteľov

- Spolupracovať s budúcimi učiteľmi na tvorbe príprav na vyučovanie a učebných materiálov, primeraných veku žiakov, ich úrovni, individuálnym potrebám, umožňujúcim diferencovane riešiť úlohy, atď.
- Pripraviť pokyny a osnovu pre postup pri rozборе.

Rozbor

Tento návrh bol pripravený pre študentov učiteľstva matematiky pre 2. Stupeň ZŠ (11-15 rokov) a nižší stupeň 8. ročného gymnázia alebo ako doplnujúce štúdium v kurze didaktiky matematiky.

Miesto realizácie: Pedagogická fakulta Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici

Učítelia: Učítelia katedry matematiky a didaktici matematiky , 1 vedúci učiteľ a dvaja vyučujúci matematiky a jazyka anglického.

Budúci učítelia: 18 budúcich učiteľov v kurze Didaktiky matematiky

Harmonogram – 2 hodiny týždenne

Týždeň	Činnosti	
1.	Študenti	príprava Tangramu – biely a farebný oboznámenie sa s pravidlami hry Tangram klasifikácia geometrických pojmov uvedených v Mape pojmov v prílohe 1 – Miera
	Domáca úloha	motivácia pre klasifikáciu štvoruholníkov použitie internetu ku štúdiu hier práca vo dvojiciach na príprave vyučovacej hodiny tvorba mapy pojmov
2.	Študenti	diskusia o rôznych riešeniach v prípravách dvojíc a skupín prezentácia rozdielov v práci s farebnými modelmi objasnenie rozdielov v terminológii iných vyučovacích predmetov (Slovenský jazyk, Fyzika, Výtvarná výchova, Prírodoveda, Zemepis, atď.) kritická analýza prezentovaných príprav na vyučovanie
	Domáca úloha	záverečná príprava na vyučovanie s použitím medzipredmetových vzťahov analýza vzdelávacích cieľov popis vyučovacích krokov a úloh pre žiakov v príprave
3.	Študenti	mikrovyučovanie vlastných pripravených plánov záverečná diskusia o vyučovacích plánoch a ich častiach príprava dvoch cvičných učiteľov v triedach ktorých sa bude učiť ostatní študenti komentujú a overujú – pripravujú videozáznam
	Domáca úloha	analýza pripravovaných častí vyučovacej hodiny príprava materiálov pre žiakov, ktorí nebudú rozumieť pracovným listom
4.	Študenti	študenti a učítelia sledujú videozáznam a analyzujú obsah vyučovania a komunikáciu učiteľa a žiakov cvičný učiteľ klasifikuje prácu budúcich učiteľov a komentuje ich tvorivú prácu
	Domáca úloha	študenti nakreslia návrh na logo predmetu Didaktika matematiky používajúc pri tom Tangram

Realizácia častí návrhu

Realizácia na fakulte

Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Pedagogická Fakulta.

Povinný vyučovací predmet: Didaktika Matematiky A a B, 2 hodiny týždenne

Budúci učitelia sú študenti 3. ročníka štúdia učiteľstva matematiky pre 2. stupeň ZŠ.

Počet účastníkov kurzu: 18, vek 21 – 23 rokov.

Realizácia v triede

Evanjelické gymnázium Banská Bystrica, Skuteckého 5. Má triedy 8 tried nižšieho a vyššieho stupňa, vyučovanie sa realizovalo v kvarte, vek žiakov 12 – 14 rokov, počet prítomných žiakov 21. Integrované vyučovanie matematiky v angličtine a geometrie v angličtine (4hodiny) pod vedením dvoch cvičných učiteľov – angličtinár a matematik. Budúci učitelia učili striedavo.

Kameramanom bol študent kurzu. Ostatní študenti analyzovali videozáznam hodiny.

Základná škola Amos v Martine, ul. Východná, 5. ročník, (11 rokov) alternatívne vyučovanie matematiky a prírodovedy. (4hodiny) Počet žiakov 23. Dvaja učitelia – cvičný učiteľ a študent. Bez fakultného učiteľa. Budúci učitelia sledovali videozáznam.

Činnosti v triede

Modelovali v rovine(E2) – učiteľ motivoval žiakov.

Klasifikácia štvoruholníkov.

Proces skladania a rozkladu.

Obvod a obsah.

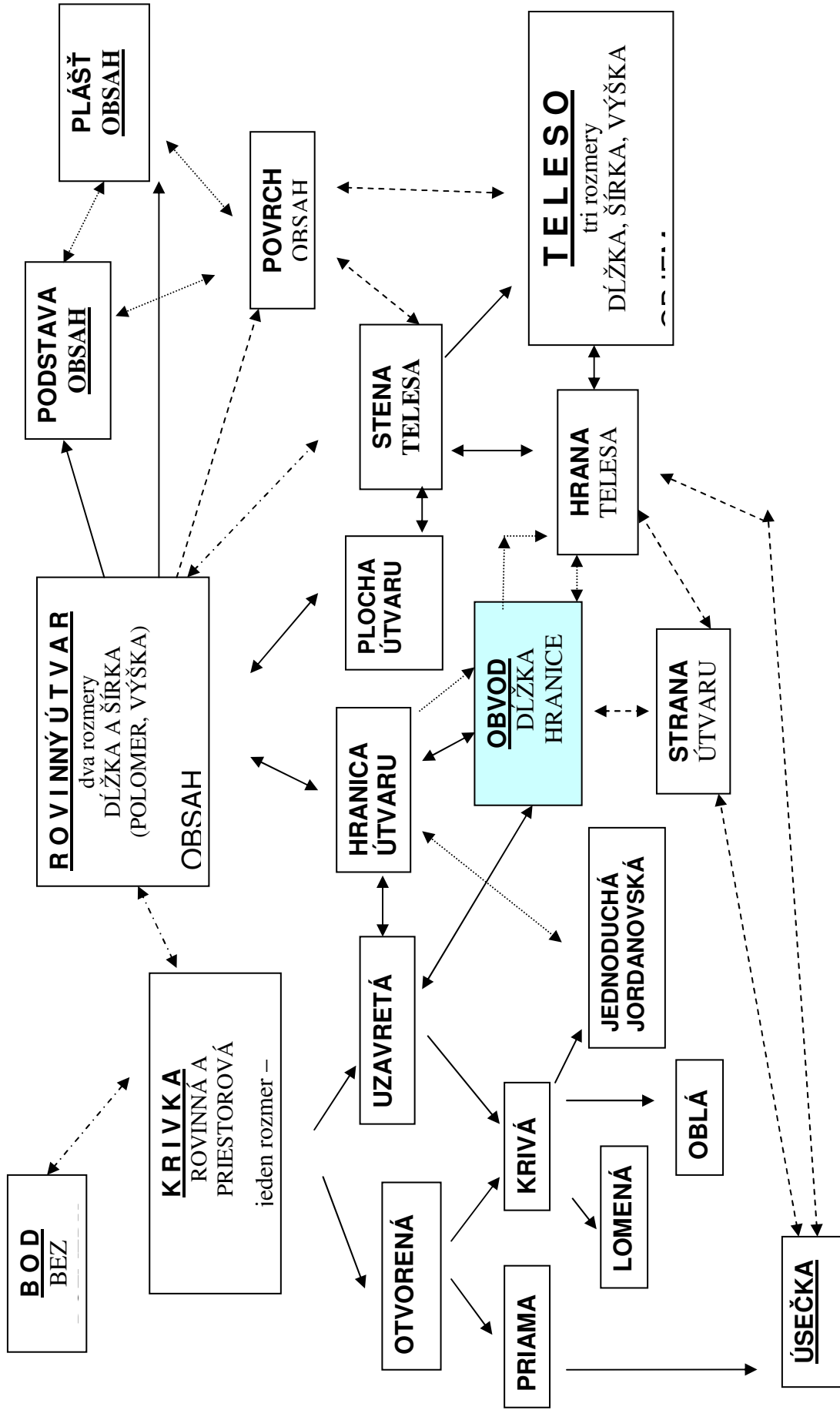
DOPORUČENÁ LITERATÚRA

Brincková, J. (1996) *Didaktická hra v geometrii*. (Didactical games in geometry). Bratislava: DONY.

Brincková, J. (2001) *Tvorivé dielne 2* (Zamerané na didaktické hry). Banská Bystrica: PFUMB.

Millington, J. (1998) *Tangram. Puzzle picture to make you think!* Stockholm.

Príloha 1 Pojmová mapa - Miera: VĚLIČINA A VĚLKOSŤ ÚTVARU



Druhá pilotáž

Brunetto Piochi*

Budúci učelia majú za úlohu vytvoriť čo najviac rôznych rovinných obrázkov a rovinných geometrických tvarov použijúc klasický Tangram zo 7 častí (prípadne vytvorený nimi samými). Následne si budú všímať geometrické vlastnosti (konvexnosť, počet vrcholov....) takýchto rôznych tvarov za účelom objavenia všeobecných súvislostí alebo ich klasifikácie. Osobitnou úlohou pre nich bude použiť iba niektoré stanovené tangramové časti pri konštrukcii pravidelných mnohostenov. Tiež sa budú zaoberať vlastnosťami (nie podobných) útvarov z hľadiska obsahu a obvodu.

Podobné aktivity budú uskutočnené so žiakmi a výsledky ich pilotovania budú vzápätí diskutované s budúcimi učiteľmi.

Matematická problematika

Aktivita je zameraná na geometrické vlastnosti obrázkov, osobitne na meranie obsahu a obvodu a na izometrické transformácie.

Ciele

Pre učiteľov

- Viest' budúcich učiteľov od teórie k praxi.
- Umožniť budúcim učiteľom vyskúšať si na sebe aktivitu predtým, než ju navrhnu žiakom.
- Poskytnúť inštrukcie a spätnú väzbu.

Pre budúcich učiteľov

- Diskutovať o základných pojmoch geometrie a spôsoboch ich prezentácie.
- Realizovať zložitú úlohu definovania "geometrického tvaru".
- Vyskúšať si aktivitu klasifikácie na neštandardných tvaroch.

Pre žiakov

- Poznať základné názvy a poznatky týkajúce sa niektorých bežných mnohostenov.
- Byť schopný merať dĺžku úsečky (priamo alebo v prípade nevyhnutnosti pomocou Pytagorovej vety).
- Pracovať so zhodnosťou rovinných útvarov, ktoré môžu byť rozložené na rovnaké časti.

* Dipartimento di Matematica, Università di Firenze, Taliansko.



- Pracovať s rovinnými útvarmi prostredníctvom izometrických transformácií a ich skladania poznajúc, kedy nové útvary sú podobné s predchádzajúcimi.

Opis činnosti

Činnosti sa uskutočnili v SSIS (Špecializačná škola pre stredné vzdelávanie) a zúčastnilo sa ich 42 študentov prvého a druhého ročníka SSIS, špecializácie Prírodné vedy, pripravujúcich sa vyučovať matematiku a prírodovedu na druhom stupni základnej školy.

Etapy a časovanie

- Prezentácia Tangramu a aktivít s geometrickými tvarmi (1h30')
- Diskusia a vytvorenie plánu činnosti v triede (45')
- Pilotovanie v triede (medzi 3 až 5 hodinami, závisiac na triede)
- Záverečná diskusia (30')

SSIS študenti dostali kartónové verzie Tangramu na vystrihnutie. Nasledujúce tri aktivity boli navrhnuté a potom spoločne okomentované:

- Vytvoriť štvorcovú sieť 8×8 a na nej nájsť súradnice vrcholov, ktoré treba spojiť, aby sa vytvorili strany tvarov, ktoré tvoria hlavolam Tangram: $(8,0)$ a $(0,8)$; $(0,0)$ a $(4,4)$; $(8,4)$ a $(4,8)$; $(2,6)$ a $(4,8)$; $(6,2)$ a $(6,6)$; $(4,4)$ a $(6,6)$.
- Vytvoriť všetky možné geometrické tvary použijúc štvorec a dva malé trojuholníky a priložiť pritom zhodné strany k sebe. Vytvorené útvary klasifikovať podľa počtu vrcholov, obsahu a obvodu.
- Použiť všetky časti Tangramu na konštrukciu známych mnohostranných útvarov: trojuholníka, štvorca, obdĺžnika.

V diskusii, ktorá nasledovala za činnosťou, boli študenti vyzvaní zodpovedať nasledujúce otázky zameriavajúce sa hlavne na didaktické aspekty aktivít:

- Ktoré kompetencie sú zahrnuté v tomto type aktivít? Ktoré nevyhnutné predpoklady sú potrebné? Ktorý typ učenia je podporený?
- S akými ťažkosťami u žiakov ste sa stretli pri tejto aktivite? Myslíte si, že žiaci by zvládli aj ďalšie obtiaže? Ako im možno pomôcť prekonať ich?
- Ako možno pomocou tohto nástroja načrtnúť aktivitu v triede? Na akej úrovni vyučovania? Aké sú podľa vášho názoru najdôležitejšie body, na ktoré sa treba zamerať?

Neskôr dvaja budúci učitelia, ktorí už vyučovali, realizovali vyučovací experiment v triede: ich voľba bola daná faktom, že mohli pracovať v známej triede a použiť aktivitu zo štandardných sylabov. Plán, hlavne načrtnutý v prípravnej diskusii, bol použitý týmito budúcimi učiteľmi a prispôbený ich vlastnému vyučovaciemu kontextu; experiment sa uskutočnil v štyroch triedach (spolu sa ho zúčastnilo asi 80 žiakov vo veku 11 až 14 rokov); jedna z týchto tried ho použila ako tútorovaciu aktivitu s triedami prvého stupňa základnej školy.



Žiaci dostali klasický štvorcový Tangram zo 7 častí (buď ho vystrihli alebo skonštruovali na štvorcovej sieti). Ich úlohou bolo konštruovať rôzne rovinné tvary (buď zábavné alebo geometrické) použivúc tieto tvary a následne vytvárať hypotézy a overovať ich. Osobitnou úlohou bolo konštruovať tvary iba použitím stanovených tangramových častí, určovať ktoré útvary sú zhodné, tvoriť hypotézy týkajúce sa možných klasifikácií a zamýšľať sa nad rozširovaním a obvodom útvarov takto skonštruovaných.

Experimentátori na konci podali správu o ich činnosti ostatným s vyhodnotením hypotéz vytvorených v prípravnej diskusii. Napokon celá skupina vybrala činnosti osobitého významu kvôli ich budúcemu analyzovaniu.

PREZENTÁCIA

Výučba geometrie, najmä na 1. a 2. stupni základnej školy je obzvlášť dôležitá, nielen pre novonaučené pojmy vzťahujúce sa k danej téme. Geometria hrá rozhodujúcu úlohu pri formovaní racionálneho uvažovania aj ako *priestorový organizér* aj poskytujúc *racionálny opis* priestoru.

“Geometrizarovanie” našej skúsenosti so svetom okolo nás je primárna matematická aktivita, ktorá predchádza prvotnú skúsenosť s počítaním. Deti majú vo veľkom a pritom spontánne tendenciu reprezentovať ich nadobudnuté skúsenosti prostredníctvom graficko-obrázkových aktivít prv než spočítavajú objekty okolo seba. Táto graficko-obrázková aktivita má tendenciu reprezentovať aj interpretovať našu skúsenosť s realitou; je to matematika, ktorá v istom momente ponúka špecifické nástroje na opis týchto reálnych objektov: priamok, bodov, útvarov, ...

Geometria teda pramení z pozorovania, manipulovania, konštrukcie a reprezentácie jednoduchých objektov, z prehýbania, vyrezávania, skladania, z pozorovania niečoho a okolia v zrkadle... Následná “geometrizarácia” nie je ľahká ani jednoduchá, vyžaduje si schopnosť “interpretácie” umožňujúcej prechod od prvotného pozorovania ku zložitému racionálnemu porozumeniu. Geometrické myslenie sa vyvíja počas celej školskej dochádzky cez rôzne vyučovacie a učiace úrovne, spájajúc v sebe konkrétne a racionálne aspekty geometrie, hoci jedno alebo druhé prevláda v rôznych fázach školskej dochádzky.

Aby sme to ilustrovali na príklade, uvažujme o “geometrických útvaroch”. Prvý prístup je práca s (jednoduchými a pravidelnými) geometrickými útvarmi opíšuť ich tvar a vlastnosti: toto možno nazvať “vizuálnou” úrovňou. Tento prístup normálne charakterizuje prvé roky základnej školy (od 6 do 8 rokov). Neskôr sa posunieme k poznávaniu a opisovaniu útvarov na báze naučených vlastností, na “opisno-analytickej” úrovni. Napokon žiaci konštruujú definície, nachádzajú charakterizujúce vlastnosti a používajú odôvodnenia a dôkaz: toto je najvyššia a najabstraktnejšia úroveň, ktorá vrcholí “formálnou” úrovňou predpokladajúcou dôkazy tvrdení a štúdium axiomatických systémov geometrie (alebo povedzme axiomatických systémov).



Byť schopný pracovať s útvarmi a rýsovať ich patrí medzi dôležité nástroje vo výučbe geometrie: pri rýsovaní si žiak vizualizuje jednotlivé črty a vlastnosti objektov, pretože vlastnosti geometrických objektov sú graficky interpretované prostredníctvom priestorových vzťahov. Avšak obrátený proces, od rýsovania ku geometrickému objektu má pôvod v ľudskom subjektívnom akte interpretácie: rozpoznávať vizuálne priestorové vlastnosti súvisiace s geometrickými vlastnosťami nie je spontánna aktivita a preto si vyžaduje riadny vyučovací proces. (Geometrický) náčrt môže byť interpretovaný mnohými spôsobmi v rôznych kontextoch a vnímanosť nastupuje v momente, keď interpretácia je konštruovaná: toto môže viesť k zlým výsledkom, najmä ak čitateľove teoretické poznanie je limitované a neumožňuje mu dostať sa za perceptuálne čítanie.

Prechody od objektu k jeho geometrickému náčrtu pomocou identifikácie jeho črt a naopak od náčrtu ku geometrickému objektu pomocou interpretácie ukazujú ako grafické aktivity a ich postupná kultivovanosť sú aj dôsledok aj zdroj učenia. Napríklad je cez ne možné poukázať na problémové miesta v nesprávnych teoretických pojmoch (je extrémne ťažké, aby sa „výšky“ trojuholníka urobeného na štvorcovej sieti pretínali v bode ...) alebo na výhody teórie, ktorá nám umožňuje „predpovedať“ všeobecné následky (zhodnosť tretích strán dvoch trojuholníkov, ktoré majú dve strany a uhol medzi nimi zhodné ...).

Vysoko relevantnými pri takomto vnímaní učenia geometrie sú tie aktivity, ktoré sú nastolené ako hraničné skúsenosti prezentujúce aj hravé aj grafické aspekty a súčasne ponúkajúce príležitosť pre abstraktnú matematizáciu. Príliš často sa v učiteľskej praxi preskočí tento prechodový moment a najcitlivejšie obdobie je práve začiatok druhého stupňa základnej školy, keď nástojenie na definíciách a vzorcoch vytrhnutých z konkrétneho kontextu prispieva k (často trvalému) deformovaniu pohľadu na matematiku. Geometrický aspekt je videný a vnímaný ako určený mnemonickou znalosťou definícií a vzorcov. Preto sa zdá nevyhnutné dať si dobrý pozor na opis a evaluáciu tohto typu aktivity pri príprave učiteľov.

Plán na využitie Tangramu, ktorý sme pilotovali, je v súlade s týmto edukačným pohľadom.

AKTIVITY S BUDÚCIMI UČITEĽMI

Všetci študenti SSIS dostali kópiu hlavolamu Tangram na hárku, odkiaľ bol ľahko vystrihnuteľný.²

V úvodnej časti sme sa odrazili zo schémy pripravenej slovenskými kolegami: kvôli časovému obmedzeniu sme vynechali časť, kde študenti SSIS pracujú na voľnej konštrukcii útvarov z Tangramu. Budúci učelia boli každopádne upozornení, že v tejto aktivite, práve tak ako ľubovoľnej inej manipulatívnej alebo kvázi-laboratórnej aktivite by prvotná fáza mala spočívať vo voľnom skúmaní; teda je

² Budúci učelia tiež dostali, okrem iných vecí, schému úloh vytvorených kolegami z Banskej Bystrice (SK), pravdaže preložených, takže každý budúci učiteľ mohol mať k dispozícii úplný materiál k diskusi.

potrebné nechať deťom nejaký čas “pohrať sa”, preskúmať rôzne časti a pokúsiť sa ich použiť pre rozmanité kreatívne diela.

Potom sme so študentmi SSIS pokračovali tým, že na fóliách boli odprezentované samotný hlavolam Tangramu a množina obrázkov, ktoré sa mali z neho vytvoriť. Bolo poukázané, že by bolo žiaduce, aby žiaci boli povzbudení pracovať na vytváraní týchto obrázkov alebo vynachádzaní nových buď individuálne alebo v malých skupinách. Táto fáza sa môže na prvý pohľad zdať bezcenná z matematického pohľadu (mnoho budúcich učiteľov tento názor aj malo, hoci neskôr si ho pozmenili), ale je mimoriadne dôležitá v rovine motivácie a preto, že umožňuje žiakom kontakt s materiálom a preskúmať intuitívne jeho potenciál i obmedzenia.

Pri pozeraní na fólie bola študentom SSIS položená otázka, či túto aktivitu považujú za ľahkú pre svojich žiakov a ako vidia matematický edukačný aspekt tejto fázy aktivity (prítom mysliac stále na hravý a motivačný aspekt). V diskusii, ktorá nasledovala padlo niekoľko názorov, ktoré sa všetky zhodovali: aktivita bola ľahká, relevantná z hľadiska interdisciplinarity (s výtvarnou a technickou výchovou), ale málo zmysluplná z matematického hľadiska. Myslíme si, že tento zmätok ukazuje deformovaný pohľad na predmet tak ako sme ho spomínali skôr: napriek predchádzajúcim kvázi-laboratórnym skúsenostiam, pre budúcich učiteľov je problém vidieť potenciál geometrickej výuky v aktivitách, v ktorých prevažuje neformalizovaný prístup.³

Je zaujímavé poukázať, že neskôr, pri aktivite v triede, táto fáza predchádzala samotnej geometrickej činnosti. V záverečnej diskusii poznamenali, že považovali túto aktivitu za relatívne ľahkú a dokázali ľahko poskladať navrhované obrázky. Avšak samotní budúci učitelia poukázali na to ako táto aktivita prispela k objaveniu série „vlastností“ útvarov, ktoré učitelia zvyknú považovať za samozrejmé, obzvlášť tie vlastnosti, ktoré sa vzťahujú k dynamickej povahe pozície útvarov v rovine (je známe, že mnoho žiakov má tendenciu vizualizovať si geometrické útvary staticky) alebo k rôznym konfiguráciám hraničných čiar útvarov Tangramu, ktoré vytvárajú rôzne časti skladaného útvaru: táto hranica môže byť bod alebo úsečka, môže zahŕňať časť alebo celú stranu elementárneho útvaru, atď. Práca v triede na nachádzaní lingvistického pomenovania takýchto situácií viedla k obohateniu geometrického slovníka a poslúžila ako báza pre nasledujúcu fázu. Vo svetle tejto poznámky môže byť užitočné zaradiť túto fázu aj v tréningových aktivitách v rámci SSIS.

Aktivita 1 si samozrejme vyžaduje pojmy týkajúce sa roviny so súradnicovým systémom (spolu s precíznosťou a manuálnou zručnosťou). Budúci učitelia nemali s tým nejaké osobité ťažkosti, ale predpokladali, že ich žiaci ich budú mať, pretože nemali osvojené všetky potrebné poznatky týkajúce sa roviny so súradnicovým systémom. V prípade, že tieto potrebné poznatky budú osvojené žiakmi, budúci učitelia navrhli, aby bol žiakom ukázaný útvar Tangramu a boli im poskytnuté iba niektoré súradnice. V diskusii bolo poukázané na to, že vďaka symetrii veľkosti $8=2^3$ zvolenej siete majú všetky vrcholy častí Tangramu na sieti celočíselné súradnice,

³ Pripomínáme, že budúci učitelia pri tejto aktivite boli hlavne absolventi prírodovedy, ale nie matematiky. Ich vzťah k matematike a jej vnímanie nie je často odlišné od toho, ktoré majú ich žiaci.



hoci dĺžka mnohých úsečiek je iracionálne číslo. Z didaktického hľadiska bolo zaujímavé pozorovať aké rôzne kompetencie sú požadované pri spájaní bodov s danými súradnicami alebo pri vyznačovaní súradníc bodov v rovine: týmto spôsobom je možné vytvárať rozmanité požiadavky za účelom upevnenia alebo posilnenia rôznych kompetencií podľa potreby žiakov.

Aktivita 2 ukázala budúcim učiteľom dva typy ťažkostí (prekvapujúcich aj pre nich samotných ...): potrebu identifikovať a definovať mechanizmus pre klasifikáciu zhodnosti útvarov a nemožnosť „pomenovania“ všetkých útvarov. Práve toto posledné obzvlášť poukázalo na predstavu, že geometrizácia je príliš často synonymom s „pomenovávaním“. Aktivita bola zaiste užitočná pre učiteľskú predprípravu, pretože neskôr v reálnej triede mohli viesť „objavovanie“ neštandardných mnohostenov u žiakov s väčšou ľahkosťou. Študenti tiež poukázali na relevantnosť tohto plánu pre vyučovanie pri posilnení kreatívnych kompetencií žiakov, ktorí sú týmto pozvaní zakúsiť formu autonómnej matematickej klasifikácie. My sme sa však rozhodli uskutočniť túto aktivitu ako skupinovú aktivitu, keďže požadované kompetencie nie sú možno dosiahnuté u každého jedného žiaka vo veku, ktorý sme uvažovali: skupinová aktivita umožní interakcie so všetkými možnými výhodami z toho vyplývajúcimi.

Spätná väzba, ktorá prišla okamžite od budúcich učiteľov, ale ktorá nemusí byť taká aj u žiakov (a fakticky ani nebola) je, že nie je možné klasifikovať útvary skonštruované z rovnakých častí podľa obsahu, hoci tieto útvary sú ekvivalentné, všetky rovnako rozložiteľné.

Ťažkosti pri aktivite 3 možno redukovať predovšetkým na ťažkosti (dobré známe v tzv. *celostnej* psychológii, *gestalt* psychology) v deštrukturalizácii a reštrukturalizácii predstavivosti, schopnosti vizualizovať si daný útvar ako súčasť iného, ktorého štruktúra v mysli je opäť jasná a presná. Poznávame, že pri aktivitách v triede boli žiaci oveľa rýchlejší a schopnejší realizovať tieto aktivity, azda kvôli menej rigidnej štruktúre geometrických útvarov, ktoré mali. Toto bolo aj predpovedané väčšinou študentov SSIS, ktorí predpokladali, že žiaci by mohli preukázať väčšie schopnosti vďaka predpokladanej vyššej vizuálnej kapacite.

EXPERIMENTY V TRIEDE

Štyria SSIS študenti sa dobrovoľne podujali prezentovať aktivitu vo svojich triedach. Schéma návrhu bola odsúhlasená počas spoločnej diskusie s jej prispôbením pre rôzne triedy a pre rôzne témy sylabov, s ktorými sa v triedach pracovalo. Budúci učitelia zúčastňujúci sa experimentu (učiteľ v triede a ďalší budúci učiteľ) boli požiadaní dávať pozor na veci zdôraznené v diskusii a tiež testovať hypotézy týkajúce sa ťažkostí a zmysluplnosti aktivity.

Všetci experimentátori sa zhodli v jednom (tiež kvôli faktu, že aktivity sa uskutočnili vo februári) a síce, že všetky zúčastnené triedy mali málo žiakov kvôli chrípke a zimným mimoškolským aktivitám.

Nasledujú výňatky zo záverečných správ budúcich učiteľov.

6. ročník, 5-hodinová práca, zúčastnených 12 žiakov

[Tangram bol vyrobený zo štvorcovej siete zo súradnicovým systémom, ktorej konštrukcia umožnila zopakovať si pojmy o karteziánskej rovine. Následne učiteľ ponechal žiakov voľne sa hrať s časťami Tangramu.] Hneď ako žiaci vystrihli sedem častí, začali ich skladať, otáčali ich, dávali ich dokopy, aby vytvorili obrázky a to s takým nadšením akého som ešte nebola predtým svedkom. Najúžasnejší komentár bol “Toto je ozajstná matematika!”, ktorý znamenal, ako ho jeho autor neskôr vysvetlil, že “bavíme sa a veľa pritom rozmyšľáme a lámeme si hlavu”.

Potom som navrhla, aby sa zaviedlo pravidlo platné pre všetkých: jednotlivé časti sa nesmú prekryvať, ani odkladať bokom, vždy sa musia použiť VŠETKY časti. Po prvopočiatočnom váhaní] sa časti začali točiť na každej lavici. Okamih slávy bol prisúdený čínskemu dievčatku, ktoré sa pripojilo k triede pred dvoma týždňami, bez akejkoľvek znalosti taliančiny a ktorá po nakreslení a vystrihnutí schémy v tichosti začala skladať stále viac a viac komplikované obrázky, pritom sa smejúc: prvá žena, prvá loďka, ... Nemohla som a ani nechcela ich prerušiť až kým chlapček neskonštruoval “lichobežník, pane, lichobežník!” Využila som príležitosť: “Och, áno, a zdá sa mi, že sa dajú skonštruovať aj štvorce, trojuholníky, obdĺžniky...”. Bola to nová výzva: pritom vždy so všetkými siedmimi časťami. Takmer všetci žiaci sa zapojili do hľadania a obdĺžnik, ktorý sme my, SSIS študenti, našli za 5 až 6 minút, sa objavil za menej ako minútu a pol. Skontrolovala som to nenápadne a pozvala dievčatko, ktoré ho vyrobilo, aby o ňom zreferovalo, pretože som chcela vidieť ako sa darilo ostatným: nuž, za menej ako 5 minút každý jeden študent mal skonštruovaný jeho vlastný obdĺžnik.

Pokračujúc ďalej, požiadala som ich, aby skúsili porozmýšľať nad rozšírením každého útvaru a začínajúc od útvarov, ktoré zaberajú rovnakú plochu sme sa posunuli k uvažovaniu o nich ako zložených z rovnakých častí, ktoré pri rôznom presúvaní dávajú rôzne obrázky, ktoré každopádne zaberajú stále rovnakú plochu. [...] Žiakom sa táto časť veľmi páčila, pretože každý si mohol vyberať a porovnávať časti podľa ľubovôle, pomýliť sa a začať odznova. Ďalšie úvahy nasledovali, keď si museli všímať hranice útvarov po tom ako po ich umiestnení na štvorcový papier merali ich obvod: ako to, že dostaneme rovnaké obsahy, ale natoľko rôzne hranice pri niektorých útvaroch a a nie pri iných ...?”

6. ročník, 4-hodinová práca, zúčastnených 16 žiakov

V minulosti som si všimol, že žiaci mali často ťažkosti predstaviť si geometrické útvary nad rámec kontextu učebnice-cvičebnice geometrie. V niektorých prípadoch som ich musel priviesť k rozpoznaní útvarov, ktoré si už rysovali počas hodiny technického vyučovania a ktoré mali iba zreprodukovať na hodine geometrie.

Trieda, v ktorej sa táto aktivita uskutočňovala je prevažne tvorená žiakmi prichádzajúcimi z tej istej triedy prvého stupňa základnej školy, ktorí už pracovali s Tangramom ako som zistil na začiatku hodiny. [Hoci ich rozpomínanie sa na to bolo veľmi nejasné.] Uvážil som, že by bolo lepšie nenechať žiakov pracovať rovnako ako na prvom stupni, preto sme sa presunuli do počítačovej miestnosti, kde

sme sa pripojili na web-stránku²⁸, ktorá prezentovala hru umožňujúcu žiakom hrať sa so siedmimi časťami Tangramu a vytvárať buď zábavné alebo geometrické a rovnako dlhé útvary. Časti mohli rotovať (vždy o 45°), prekladať sa, alebo, iba v prípade rovnobežníka, prevracať sa.

Aktivita bola zábavná pre každého a vyvolala zaujímavé poznámky, napríklad:

“je čudné, aby sa geometrické útvary otáčali”

“[rovnobežník] pasuje, ak ho otočím zhora nadol, je to akoby zmenil tvar”.

Zdalo sa mi, že vo všeobecnosti boli všetci zaujatí a postupne sme usúdili, že všetky útvary boli získané z rovnakého modulu prostredníctvom translácie, rotácie, prevrátenia, bez deformácie. Aj 8-ročné autistické dievčatko sa zúčastnilo aktivity a dokázalo realizovať správne a rýchlo väčšinu z hry.”

7. ročník, 5-hodinová práca, zúčastnených 15 žiakov

Zadané otázky boli pochopené každým. Aj tí, ktorí mávajú viac ťažkostí v triede pracovali samostatne a často našli správne riešenie.

Na prvej hodine boli žiaci vyzvaní použiť dva zhodné rovnoramenné trojuholníky, priložiť zhodné strany k sebe za účelom vytvorenia čo najväčšieho počtu rôznych tvarov [...] Vyzval som ich, aby sa zamysleli ako zistiť, či útvary majú rovnaký obvod alebo nie. Trieda si myslela, že by mohli použiť pravítko na odmeranie dĺžok strán, ale keď zistili, že niektoré dimenzie boli vyjadrené v desatinných číslach, rozhodli sa zvoliť si ľubovoľnú hodnotu za jednotkovú, t.j. prisúdili najmenej dimenzii jednotkovú hodnotu (rozprávali sme o tom spoločne) a používajúc Pytagorovu vetu našli ostatné dĺžky.

Potom som sa pýtal, či sú útvary zhodné. Iba 10% žiakov odpovedalo správne, čiže musel som revidovať, čo som robil predtým a navrhol som, že môžu merať počty (papierových) štvorcov. Nasledujúci týždeň sme použili štvorec a trojuholník, používajúc rovnakú metódu ako pri predchádzajúcej hodine. Tentoraz 85% odpovedalo správne na otázku, či získané útvary boli ekvivalentné a s rovnakým obvodom.

Po dvoch dňoch som ich požiadal vytvoriť obdĺžnik používajúc všetky časti Tangramu. Po počiatočnom kritickom momente našli 2 alebo 3 spôsoby ako ho vytvoriť. Spýtal som sa, či obdĺžnik a štvorec, ktorý dostali z častí boli ekvivalentné a mali rovnaký obvod. V tomto prípade všetci odpovedali správne.

[Vo všeobecnosti] bez ohľadu na počet správnych a zlých odpovedí som si všimol, že podľa toho, čo žiaci objavili počas tejto aktivity boli nútení zamýšľať sa viac pred vyjadrením ich postoja. Dostali sme mnoho riešení, hoci neboli príliš odlišné. Je zaujímavé, že nikoho nenapadlo odkukávať od spolužiaka, akoby uvažované objekty boli čosi osobné. Žiaci určite spolupracovali, ale efektívnym spôsobom, podľa potreby k svojmu riešeniu. Jeden veľmi dobrý žiak (dievča) nemohla vyriešiť problém [nájsť obsah jedného zo získaných útvarov], pretože ju nenapadlo využiť časti. O niekoľko dní neskôr sa mi priznala, že keď vyriešila geometrický problém,

²⁸ <http://www.math.it>

tak vytvorila obrázok len pre to, aby ma potešila... Iné dievča, dosť zaostávajúce, rýchlo vyriešilo problém priložením trojuholníka (ako nazvala obrázok 1) cez rovnobežník (obrázok 2) napíšuc vzťah $A_2 = 2A_1$.”

7. ročník, 4 hodiny pre počiatočnú fázu + ďalšie 4 pre tútoring, 14 zúčastnených žiakov

[Počiatočná fáza bola veľmi podobná tej uskutočnenej v triedach 6. ročníka, tiež kvôli tomu, že trieda bola vo všeobecnosti slabšia a táto trieda sa zúčastnila aktivity tútorovania so žiakmi 3. ročníka základnej školy (8-ročnými). Učiteľka si myslela, že by mohla využiť toto tútorovanie k stimulovaniu žiakov pripomenúť si ich vlastné poznatky v metakognitívnej rovine, aby ich vysvetlili mladším žiakom.] Aktivita tútoringu bola navrhnutá pre dve triedy 3. ročníka a mala dve rôzne fázy.

V prvej fáze žiaci vedení staršími žiakmi narysovali štvorcový Tangram 8 x 8 na štvorcový papier s dĺžkou strany 1 cm; Tangram bol potom vystrihnutý a mladší žiaci vymýšľali a konštruovali rôzne útvary zo 7 častí, dajúc každému výtvoru aj “názov”. Na konci si deti nakreslili tieto obrázky aj do zošitov.

Druhá fáza predstavovala “rozširovaciú” prácu, navrhnutú v spolupráci s učiteľom technickej výchovy: “veľké Tangramy” merajúce 60x60 cm boli skonštruované na hárkoch štvorcového papiera 2.5 x 2.5 cm. Tangramy boli zlepené na kartónoch a potom vystrihnuté; každé dieťa bolo pozvané rozložiť už poskladaný obrázok a vyfarbiť ho podľa svojej fantázie. Rôzne časti každého obrázka boli upevnené lepiacou páskou, spevnené bambusovými paličkami a potom nosené ako masky.

Na konci práce prebehla spoločná diskusia, v ktorej mladší žiaci vyjadrili ich údiv nad objavom, že z pôvodne identického Tangramu dokázali vyrobiť tak rôzne obrázky. Starší žiaci sa pokúsili pomôcť mladším pochopiť, prečo “niektoré tvary vyzerajú dlhšie, hoci nemohli vyrásť”, čo sa zmenilo od začiatku, keď nebol žiadny rozdiel medzi Tangramami. Medzi vetami, ktoré najviac presvedčili malé deti uvádzame nasledovné, ktoré zdá sa ukazujú porozumenie vykonanej práci a netriviálnu schopnosť verbálneho spracovania:

“Tvary sú tak veľké ako predtým, ale pozícia častí sa zmenila”

“Časti bez štítku sa zmenili, teda prázdne miesta” (samozrejme, že za touto vetou sa skrýva pojem rovnakého rozšírenia tak ako to bolo jasné chlapcovi, čo to utrúsil ...).

SPOLOČNÁ DISKUSIA SPÄTNEJ VÄZBY

Po tom ako budúci učitelia ktorí odskúšali aktivity v triede prezentovali ich správy, diskusia sa zamerala na motivačnú hodnotu aktivity (a každý s ňou súhlasil), obzvlášť na jej potenciál zaujať aj žiakov s nedostatočným záujmom alebo schopnosťou pre matematiku. Oveľa zaujímavejšie boli reakcie žiakov rôznych stupňov školy: v prípravnej diskusii niektorí budúci učitelia predpovedali, že starší študenti budú mať menší záujem. Táto predpoveď sa nepotvrdila, hoci bolo poznamenané, že mladší žiaci boli v skutočnosti viac zaujatí konštrukciou efektných obrázkov, zatiaľ čo starší žiaci boli čoskoro pripravení posunúť sa k práci na geometrických útvaroch.

V tejto fáze sme si tiež všimli ako táto práca prirodzene stimulovala nadobudnutie techník, metodológie a terminológie viazanej na geometrické transformácie. Preto bola urobená ponuka uvažovať v triedach po 6. ročníku túto aktivitu ako prípravnú pre modul „laboratórnej geometrie“, ktorá by nasledovala po téme mnohostenov a zameriavala by sa na reflexiu zhodných rozšírení a izometrií (najmä na symetriu, transláciu, rotáciu) práve tak ako na dosiahnutie kompetencií vzťahujúcich sa k vizualizácii a rozpoznávaniu geometrických útvarov všeobecne.

NÁVRHY PRE ĎALŠÍ VÝVOJ

Na konci záverečnej diskusie boli navrhnuté dve ďalšie aktivity, jedna navrhnutá a už aj čiastočne realizovaná jedným z budúcich učiteľov a druhá prezentovaná prednášateľom na SSIS:

- Tangramová Web Úloha. Ak napíšete slovo Tangram v ľubovoľnom internetovskom prehliadači, dostanete zoznam veľkého množstva web-stránok, mnohé z nich pritom navrhujú vyučovacie aktivity. Vhodná aktivita pre budúcich učiteľov by mohla byť identifikácia najdôležitejších aktivít pre výuku na úrovni ich budúcich žiakov; pre žiakov možno uvažovať o tom, že by sa pripojili na stránky obsahujúce osobitý typ informácií alebo požiadaviek, ktoré si vyžadujú ďalšie prehládavania alebo štúdium.
- Trojdimenzionálne hlavolamy. Niektorí žiaci, práve tak ako dospelí, majú silnú schopnosť priestorového videnia a grafickej reprezentácie, iní zas mávajú ťažkosti v tejto oblasti. A je dobre známe, že tieto schopnosti nie sú nevyhnutne na rovnakej úrovni ako ostatné matematické schopnosti. Sú študenti s vysokými schopnosťami vo verbálnej rovine, pre ktorých je ľahšie naučiť sa naspamäť vetu ako “teleso s 8 vrcholmi” skôr ako si vizualizovať jeho obraz; obrátene, niekto si vie perfektne predstaviť kocku a potrebuje zakaždým počítať jej vrcholy a strany ... Tento rozdiel v kognitívnych štýloch si nevyhnutne vyžaduje, aby všetkým študentom boli navrhované aktivity zahŕňajúce priestorové videnie a verbálny opis telies, takže študenti si môžu dopĺňať svoje kompetencie a aj slabší študenti, ktorí sú slabší vo výpočtovej a algebraickej oblasti, ale silní v iných oblastiach, môžu dosahovať dobré výsledky.

Aby sme doložili príkladom tento mechanizmus, nasledujúce otázky boli položené SSIS študentom:

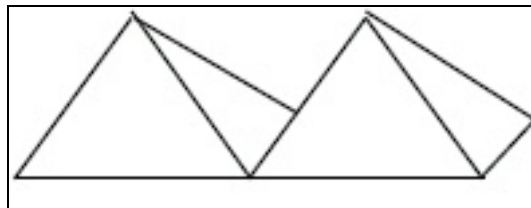
A. *“Predstavte si štvorsten a napíšte, koľko stien, hrán a vrcholov má. Predstavte si, že rozložíte štvorsten tak, aby ste dostali jeho rovinnú sieť. Aký má tvar? Existuje iba jediný?”*

Chlapec skonštruoval útvar použijúc štvorce a rovnostranné trojuholníky, nevieme koľko. Vieme, že tento útvar má 5 stien, 5 vrcholov a 8 hrán. Aký útvar je to?”

Otázka nebola nastolená s obrázkami, ale všetko ponechávala na priestorovú predstavivosť SSIS študentov.

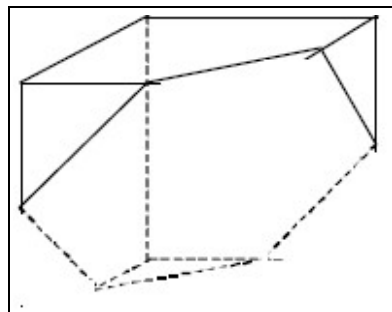
SSIS študenti pocítovali potrebu objasniť si, že štvorsten je pyramída s trojuholníkovou podstavou a štyrmi stenami (“ako silikátový ión kremeňa”, poznamenala jedna budúca učiteľka, študujúca chémiu), aby mohli vyriešiť prvú časť otázky relatívne ľahko; ďalšie kroky k riešeniu ostatných častí nasledovali, s podporou rúk pre “konštrukciu” objektu vo vzduchu.

B. “Predstavte si dve rôzne pyramídy so štvorcovou podstavou, ktorých bočné steny sú rovnostranné trojuholníky. Položte dve pyramídy do roviny, jednu vedľa druhej tak, že majú spoločnú jednu (a iba jednu) hranu podstavy. Existuje prázdny priestor medzi týmito telesami. Boli by ste schopní opísať teleso, ktoré vyplní túto prázdnotu tak, že sa získa konvexné teleso?”



3D pyramída

C. “Zoberte tri štvorce 10×10 , na jednu stranu každého nastrihnete pravouhlý trojuholník so stranou 5. Uvažujte aj pravidelný šesťuholník so stranou $5\sqrt{2}$. Skombinujte teraz týchto 7 častí, aby ste skonštruovali teleso ako je na obrázku. Postaviac takéto dve telesá vedľa seba, aké pravidelné teleso dostaneme?”



Náš celistvý model so 7 vrcholmi

Odpoveď na otázky B. a C. (respektíve, štvorsten a kocku) nie je intuitívna a tento typ cvičenia ilustruje budúcim učiteľom tie ťažkosti pri priestorovej vizualizácii, na ktoré sme upozorňovali; zároveň, aj medzi budúcimi učiteľmi aj v triede, kde aktivita bola implementovaná, niektorí dokázali “vidieť” riešenie oveľa skôr ako ostatní (niekedy prekvapujúco) a hneď sa stali tútormi a vodcami pre triedu.

D. “Vezmite jednoduché kocky (ako drevené bloky) a skúste skonštruovať teleso s pevným počtom týchto kociek. Reprezentujte potom toto teleso z rôznych možných pohľadov (spredu, sprava, zľava, zhora) používajúc zadanú vybodkovanú sieť.

Obrátene, zadajúc jeho reprezentáciu, zrekonštruujte teleso.”

V tomto type aktivity hlavná ťažkosť spočíva v tom, že reprezentácie máme v rôznych rovinách, niektoré z ktorých zakrývajú videnie, a teda vyžadujú veľké

úsilie pri priestorovej reprezentácii. Avšak táto aktivita je aj vhodná pre vytvorenie súvislostí s inými disciplínami ako sú technické vzdelávanie a výtvarná výchova, popri poskytovaní podpory pre racionálne opísanie toho, čo sa zakaždým dosiahlo.

DOPORUČENÁ LITERATÚRA

Gardner, M.(1956). *Mathematics, Magic and Mystery*. Dover Pub.

Kanizsa, G. (1973). *Il 'problem-solving' nella psicologia della gestalt*, in Mosconi, G. e D'Urso, V., *La soluzione dei problemi*. Firenze: Giunti-Barbera.

Jaglom, I.M. (1972). *Le isometrie*. Bologna: Zanichelli.

Pellegrino, C. (1999). *Prospettiva: Il punto di vista della Geometria*. Bologna: Pitagora Ed.

UMI-CIIM (2001). *Matematica 2001, Materiali per il XXVII Convegno Nazionale sull'Insegnamento della matematica*. Lucca: Liceo Scientifico "A. Vallisneri".

Tretia pilotáž (Jihočeská Univerzita, České Budějovice, CZ) a Záver

Jaroslava Brincková a Iveta Dzúriková

Cieľom projektu Tangram, ktorý bol pilotovaný v Banskej Bystrici na Slovensku, bolo sústrediť pozornosť budúcich učiteľov na dôležitosť problému činnosti merania, ktoré môžu viesť k matematickej tvorivosti žiakov. Na seminároch pre študentov – praktikantov sme použili skladačku Tangram pri príprave na vyučovanie statickej a metrickej geometrie pre 11-14 ročných žiakov nižšej strednej školy. Hlavným cieľom bolo rozvíjať tvorivé myslenie a geometrickú predstavivosť žiakov pri použití Tangramu v škole. Zamerali sme sa na prípravu školskej aktivity, v ktorej sme rozdelili koncepty obvodu a obsahu rôznych tvarov. Zároveň sme využili Tangram na demonštráciu izometrických transformácií pri meraní obvodu a obsahu.

Zamerali sme sa na tieto čiastkové ciele:

- Didaktická klasifikácia sekvenčných krokov pri modelovaní geometrických názvoch, pojmov obvod a obsah rovinných útvarov: *percepcia – modelovanie – kreslenie v rovine – meranie – objavenie funkčných vzťahov*.
- Popis úrovni geometrického myslenia podľa van Hieleho, čiastočne zamerané na dedukciu funkčných vzťahov používajúc geometrické pojmy.
- Modelovanie sveta čísel a tvarov za pomoci *jednotkovej úsečky*.
- Hľadanie vzťahov medzi obvodom a obsahom u rôznych geometrických tvarov.

Partneri z Florencie v Taliansku, ktorí spolupracovali na projekte Tangram, nám poskytli nasledujúcu spätnú väzbu:

Projekt spracováva geometrické vlastnosti zostrojenia, čiastočne aj merania obsahu a obvodu, ako aj izometrické transformácie. Je to plánované ako laboratórna činnosť, takže žiaci môžu využiť perцепčné, manuálne a logické zručnosti od



koncentrovania sa na dané objekty až po prevedenie geometrických a grafických návrhov. Od žiakov na konci aktivity sa očakáva, že budú vedieť:

- *základné názvy a pojmy niektorých obecných mnohoúhelníkov*
- *odmerať dĺžku úsečky (priamo alebo podľa Pytagorovej vety)*
- *zrealizovať ekvivalentné, rovinné útvary, ktoré budú vytvorené z tých istých rovinných častí*
- *pracovať s rovinnými útvarmi v rámci izometrických transformácií a ich kompozície, ktoré budú realizované ako nové útvary zhodné s predchádzajúcimi.*

Na projekte spolupracovala aj cvičná učiteľka Helena Binterová z Juhočeskej univerzity v Českých Budějoviciach, ktorá variovala ciele úvodného projektu.

Hlavným cieľom bolo určiť námety na rozvoj tvorivého myslenia a geometrickej predstavivosti a pripraviť budúcich učiteľov na dané možné didaktické ťažkosti.

Jednou z povinných úloh pre študentov - praktikantov bolo dokázať Pytagorovu vetu, ako aj načrtnúť a overiť platnosť vybraného postupu.

Cviční učitelia pripravovali triedy rozdielne. Študovali problém mapovaním metrickej geometrie smerom k „a priori“ analýze. U všetkých partnerov projektu sme videli tému modelovania z novej perspektívy „post priori“ analýzy.